ИСТОРИЧЕСКІЙ ОЧЕРКЪ

МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

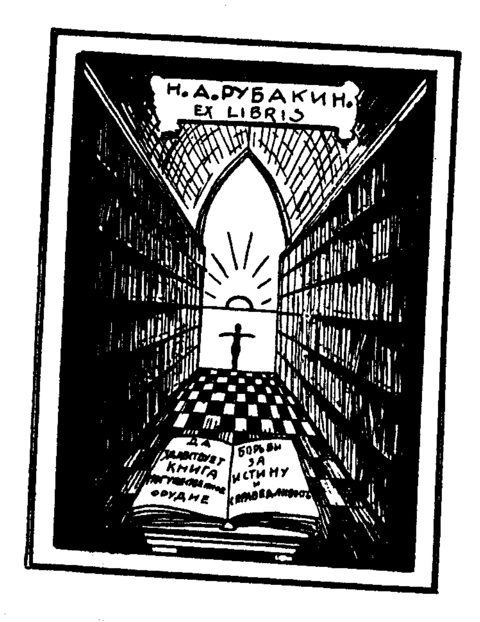
ИНДУСОВЪ.

Ординарнаго Профессора Императорскаго Университета Св. Владиміра

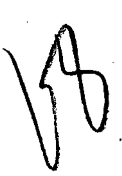
М. Е. Ващенко-Захарченко.



КІЕВЪ.
Въ типографіи Императорскаго Университета Св. Владиміра.
1882.



Печатано по опредѣленію Совѣта Университета Св. Владиміра.
Ректоръ *И. Гахманиновъ.*



Первыя изслѣдованія по исторіи развитія математическихъ наукъ у индусовъ были сдѣланы въ концѣ прошлаго столѣтія французскимъ астрономомъ Бальи, который высказалъ мнѣніе, что науки у индусовъ находились на очень высокой степени развитія и совершенства. По его словамъ, уже въ глубокой древности индусамъ было извѣстно все то, чѣмъ впослѣдствіи занимались Гиппархъ, Птоломей и Ньютонъ; познанія свои индусы унаслѣдовали отъ какого-то древняго народа, отъ котораго не осталось никакихъ памятниковъ. Другіе ученые были совершенно противнаго мнѣнія и полагали, что у индусовъ самостоятельнаго развитія наукъ не существовало и что все извѣстное имъ они заимствовали въ X вѣкѣ у арабовъ.

Знаменитый Кольбрукъ былъ однимъ изъ первыхъ, положившій прочныя основы изученію сочиненій, написанныхъ индусами по математикѣ. Онъ былъ первый начавшій изучать сочиненія эти въ подлинникахъ—на санскритскомъ языкѣ. Особенное вниманіе имъ было обращено на сочиненія Брамагупты и Баскары, писателей жившихъ въ VII и XI вѣкахъ. Въ 1817 г. появилось его замѣчательное сочиненіе: „**Algebra with Arithmetic and Mensuration ect.**“, которое пролило совершенно иной свѣтъ на все извѣстное до того времени объ индусской математикѣ. Сочиненіе это до настоящаго времени не утеряло значенія. Къ сожалѣнію на сочиненія Кольбрука и нѣкоторыхъ другихъ ученыхъ, писавшихъ также объ математикѣ индусовъ, не было обращено должнаго вниманія, пока Шаль въ одной изъ главъ своего „**Aperçu historique**“ не коснулся этого вопроса и тѣмъ вывелъ сочиненіе Кольбрука изъ забвенія.

Послѣ изслѣдованій Кольбрука и Шаля вопросъ о развитіи математическихъ наукъ у индусовъ не подвигался впередъ и только въ послѣдніе годы снова на этотъ предметъ было обращено должное вниманіе. Изслѣдованія послѣдняго времени показали, что сочиненія Брамагупты и Баскары относятся къ сравнительно позднему времени и что уже за нѣсколько столѣтій до нихъ существовали математическія сочиненія. Къ числу такихъ сочиненій принадлежитъ „Аріабгаттіамъ“, написанное въ VI в. по Р. Х.

Аріабгаттой. Санскритскій текстъ этого сочиненія былъ изданъ въ 1874 г. профессоромъ Лейденскаго университета Керномъ; нѣкоторыя части этого сочиненія переведены и комментированы французскимъ ученымъ Роде. Къ числу древнѣйшихъ санскритскихъ математическихъ сочиненій принадлежатъ сборники правилъ для построенія жертвенниковъ. Сочиненія эти извѣстны подъ именемъ „Сулвасутръ“ или „Правилъ веревки“. Въ настоящее время изданы Тибо три такихъ сборника.

Особенно много обязана наука членамъ „Азіатскаго Общества“ въ Калькуттѣ, которые занимаются собираніемъ и разработкой различныхъ санскритскихъ сочиненій. Къ числу членовъ этого общества принадлежалъ также Кольбрукъ. Въ настоящее время за изученіе, сохранившихся древнихъ санскритскихъ сочиненій, принялись также туземные ученые.

Въ предлагаемомъ очеркѣ мы старались на сколько возможно кратко, въ общихъ чертахъ, представить все извѣстное въ настоящее время объ математическихъ познаніяхъ индусовъ и познакомить интересующихся съ содержаніемъ, дошедшихъ до насъ сочиненій математическаго содержанія, написанныхъ на санскритскомъ языкѣ. Особенное вниманіе мы обратили на методы и пріемы, употребляемые индусскими учеными и указали на ихъ характеристическія особенности.

Настоящая статья есть глава изъ печатаемаго нами сочиненія: „Историческій очеркъ развитія Геометріи отъ самыхъ древнихъ временъ до настоящаго времени“. Всѣ ссылки въ скобкахъ въ настоящей статьѣ относятся къ этому сочиненію.

М. Ващенко-Захарченко.

Кіевъ,
въ Сентябрѣ 1881 г.

Въ началѣ нашего Очерка мы указали на особенности, представляемыя Геометріей индусовъ и упомянули, что они достигли высокаго развитія въ Алгебрѣ и Ариѳметикѣ; въ настоящее время мы коснемся этого вопроса обстоятельнѣе, указавъ чего именно достигли индусы въ этихъ наукахъ.

Благодатный климатъ страны, необыкновенное плодородіе почвы, изобиліе естественныхъ произведеній, все это имѣло громадное вліяніе на умственное развитіе и міровоззрѣнія индусовъ Созерцаніе величественной природы способствовало совершенно иному взгляду на міръ и на все окружающее, и всего яснѣе и опредѣленнѣе отразилось на ихъ умственномъ мышленіи, которое получило то отличительное направленіе и характеръ о которомъ мы говорили выше.

Взглядъ индусовъ на внѣшній міръ былъ гораздо шире и величественнѣе, чѣмъ воззрѣнія древнихъ грековъ. Въ своей философіи они достигли того, что отъ разсмотрѣнія тѣлъ природы они перешли къ представленіямъ о безконечномъ, безграничномъ, безформенномъ, вѣчномъ; на міръ они стали смотрѣть какъ на нѣчто превратное, проходящее; представленіе о формѣ и видѣ уступило мѣсто понятіямъ о веществѣ и божественномъ началѣ. Подобныя воззрѣнія отразились и въ математикѣ индусовъ. Тоже самое имѣло мѣсто и у древнихъ грековъ, которые исходя изъ своихъ воззрѣній, искали дѣйствительно существующее, стремились узнать, на сколько необходимо, все окружающее. Индусы же напротивъ, изслѣдуя создавали формы и довольствовались найти, что нѣчто существуетъ ни сколько незаботясь каково оно на самомъ дѣлѣ, Оба эти направленія были слишкомъ односторонни, но вмѣстѣ съ тѣмъ необходимы. Связи этихъ двухъ направленій новѣйшая математика обязана своимъ быстрымъ развитіемъ. Въ то время когда греки ставили все въ зависимость отъ формы, такъ что даже чисто ариѳметическія предложенія получали геометрическій характеръ,

индусы обращали вниманіе на однѣ только числа и Геометрія ихъ составляла часть ариѳметики.

Вліяніе окружающей природы лучше всего отразилось на религіозныхъ воззрѣніяхъ и космогоніи древнихъ индусовъ *). Въ этомъ направленіи они представляютъ поразительную противоположность съ понятіями древнихъ грековъ на тѣ же предметы. Индусы представляли себѣ своихъ боговъ подъ самыми странными и страшными образами, они являются у нихъ большею частью въ видѣ: карликовъ, великановъ, слоновъ, черепахъ и различныхъ чудовищъ; напримѣръ Шиву они изобразили съ тремя глазами, съ черепомъ въ рукахъ, онъ носитъ ожерелье изъ человѣческихъ костей и опоясанъ змѣями. Жена его имѣетъ четыре руки, цвѣтъ ея темно-синій и т. п. Подвиги, сдѣланные богами индусовъ самые невѣроятные и необыкновенные Боги эти возсѣдаютъ въ различныхъ этажахъ неба, живутъ десятки и сотни милліоновъ лѣтъ, число ихъ доходитъ до 330 милліоновъ. Во всѣхъ своихъ понятіяхъ индусы безграничны, всему сколько нибудь важному они приписываютъ самую глубокую древность, такъ напримѣръ по ихъ мнѣнію законы Ману написаны за 2 000 000 000 лѣтъ, между тѣмъ какъ извѣстно что законы эти составлены не болѣе какъ за 3000 лѣтъ. Индусы такъ часто пріобрѣтаютъ къ употребленію огромныхъ чиселъ, что у нихъ даже существуетъ особое названіе *азанка* для обозначенія единицы сопровождаемой 60-ю нулями.

У грековъ, мы видимъ, совершенно противоположное, боги ихъ напоминаютъ собою обыкновенныхъ людей, не только по своему внѣшнему виду, но и по характеру и дѣйствіямъ.

Не смотря на то, что индусы приписываютъ своей наукѣ самую глубокую древность, но относительно этого вопроса положительныхъ указаній не существуетъ **). Самый древній изъ извѣстныхъ намъ въ настоящее время математиковъ индусовъ есть *Аріабгатта*, жившій въ V в. по Р. Х., онъ написалъ сочиненіе астрономическаго содержанія, подъ заглавіемъ „*Аріабгат-*

---

*) Вліяніе природы на умственную дѣятельность человѣка прекрасно изображено у Бокля, въ его сочиненіи „Исторія цивилизаціи въ Англіи", въ главѣ: Вліяніе законовъ природы на устройство общества и характеръ отдѣльныхъ лицъ (Т. I, Гл. II).

**) По словамъ арабскаго писателя X-го вѣка Масуди у индусовъ уже въ глубокой древности процвѣтали науки. Значительный шагъ впередъ онѣ сдѣлали во время царя Брами, когда въ храмахъ были поставлены изображенія небесныхъ глобусовъ, составлены правила астрологіи, изучено вліяніе звѣздъ на человѣка и животныхъ; въ это же время были составлены: *Сидгинта*, т. е. книга времени временъ, астрономическія таблицы, а также изобрѣтены девять знаковъ, при помощи которыхъ индусы производятъ свои вычисленія. Масуди также утверждаетъ, что „Алмагестъ" написанъ индусами, и что Птоломей изъ него заимствовалъ содержаніе своего сочиненія.

тіамъ". Изъ содержанія этого сочиненія можно заключить, что Аріабгатта былъ только собирателемъ и толкователемъ найденнаго уже до него другими. Обративъ вниманіе на методы и пріемы употребленные имъ, о которыхъ мы скажемъ ниже, необходимо предположить, что до того состоянія и развитія въ которомъ находились математическія науки во время Аріабгатты прошелъ не малый промежутокъ времени. Такое предположеніе еще тѣмъ вѣроятно, что намъ извѣстны математическія сочиненія халдеевъ и египтянъ, написанныя болѣе чѣмъ за 2000 л. до Р. Х., и несправедливо было-бы предполагать, что индусы отстали отъ нихъ. Но во всякомъ случаѣ древность, приписываемая индусскими учеными своимъ наукамъ, весьма далека отъ дѣйствительности. Подобная древность могла быть только создана фантазіей человѣка тропическихъ странъ *).

---

*) Пристрастіе индусовъ къ употребленію большихъ чиселъ отразилось въ ихъ космогоніи и религіозныхъ вѣрованіяхъ. Вся космогонія индусовъ основана на миѳологическихъ воззрѣніяхъ. Продолжительность всего вещественнаго міра они дѣлятъ на четыре большіе періода или вѣка, названные ими *yugas*. Періоды эти выражаются въ солнечныхъ годахъ. Періоды эти слѣдуютъ одинъ за другимъ въ слѣдующемъ порядкѣ и заключаютъ каждый извѣстное число лѣтъ:

1-й періодъ *Satya-yuga* (золотой вѣкъ)	1 728 000
2-й періодъ *Tretâ-yuga* (серебряный вѣкъ)	1 296 000
3-й періодъ *Drâpara-yuga* (бронзовый вѣкъ)	864 000
4-й періодъ *Kali-yuga* (желѣзный вѣкъ)	432 000
Полная сумма составляетъ *mahâ-yuga* (большая юга)	4 320 000

Въ послѣдней югѣ мы живемъ. Число 4320000 умноженное на 1000 составляетъ новый періодъ, извѣстный подъ именемъ *kalpa*—это время протекшее отъ сотворенія всего міра. Въ сочиненіи астрономическаго содержанія *Sûrya-Sidhânta* сказано, что въ началѣ втораго вѣка, за 2160000 лѣтъ до начала kali-yuga, начали свое движеніе солнце, луна и пять большихъ планетъ. Въ эту эпоху свѣтила эти находились на одной прямой линіи, проходящей чрезъ солнце, въ полночь, подъ меридіаномъ города *Lanka*. Отъ этого мѣста и слѣдуетъ начинать счетъ. Мѣсто, названное индусами *Lanka*, принадлежитъ къ области ихъ фантазіи. Періодъ времени въ 4 320 000 лѣтъ носилъ названіе *Maha-yuga*. 360 человѣческихъ годовъ, т. е. обыкновенныхъ годовъ, равнялись одному божескому году; такимъ образомъ число годовъ заключающихся во всѣхъ четырехъ періодахъ равнялось 12 000 божескихъ годовъ.

Послѣ составленія законовъ Ману воззрѣнія браминовъ на продолжительность періодовъ времени, прошедшихъ со времени сотворенія міра, значительно расширились; періодъ въ 4 320 000 лѣтъ представляется уже воображенію браминовъ слишкомъ незначительнымъ и короткимъ. Они вводятъ представленіе о новомъ періодѣ, именно 1000 разъ взятый періодъ въ 4 320 000 лѣтъ они принимаютъ равнымъ одному дню Брамы, т. е. продолжительности существованія всего міра. Періодъ этотъ подраздѣлялся на другія. 71 *mahayugas* составляли періодъ Ману или *manouantara*. Каждому дню Брамы соотвѣтствовала равная ему ночь. Число всѣхъ *manouantara*, по понятіямъ браминовъ, было безконечно. Послѣ каждаго *manouantara* слѣдовалъ потопъ, все разрушалось, а затѣмъ съ наступленіемъ слѣдующаго періода все создавалось вновь. 720 000 *mahayugas* или 3 110 400 000 000 человѣческихъ годовъ

Говоря объ индусской Геометріи, мы упомянули о индусскихъ ученыхъ, которые имѣли обыкновеніе приписывать себѣ чужія изобрѣтенія и открытія и тѣмъ многократно вводили въ заблужденіе европейскихъ ученыхъ и въ томъ числѣ извѣстнаго Кольбрука *); къ этому можно прибавить еще слѣдующее: нѣкоторые ученые, въ послѣднее время, стали съ большимъ недовѣріемъ относиться къ глубокой древности всей индусской науки вообще, такъ напримѣръ извѣстный Седильо не вѣритъ даже въ глубокую древность санскритскаго языка, указывая на то, что нѣтъ ни одной санскритской надписи между многочисленными развалинами древнихъ пагодъ. Санскритскій языкъ никогда не былъ языкомъ разговорнымъ, это былъ священный языкъ браминовъ, на что указываетъ само названіе *sanctum scriptum* **). Къ этому можно прибавить еще то, что Кольбрукъ, много занимавшійся индусской литературой, положительно утверждаетъ, что санскритскій языкъ весьма мало отличается отъ греческаго. Мы уже выше упо-

составляли божескій годъ. По истеченіи одного вѣка Брамы, т. е. божескихъ годовъ, или 720 000 *magayugas*, или 3 110 400 000 000 000 человѣческихъ лѣтъ, послѣ разрушенія и сотворенія 36 000 міровъ, должно наступить окончательное распаденіе всѣхъ веществъ и матеріи. Самъ Брама перестаетъ существовать и онъ возвращается въ то состояніе, изъ котораго онъ произошелъ.

Послѣ періода отдыха и тьмы снова наступаетъ цѣлый періодъ міровъ. Снова является Брама. Подобный порядокъ продолжается вѣчно.

Среди такого хаоса цифръ, понятіе о которыхъ недоступно нашему представленію, брамины вполнѣ точно и опредѣленно стараются указать событія въ хронологическомъ порядкѣ.

Напомнимъ здѣсь, что періодъ въ 4 320 000 годовъ былъ извѣстенъ халдейскимъ астрономамъ. Значеніе періода въ 4 320 000 лѣтъ, и почему именно это число, а не другое, было выбрано индусами за время продолжительности всего міра, пытался объяснить извѣстный Біо, въ своемъ сочиненіи: *Biot, J. B.* Études sur l'astronomie indienne et chinoise. Paris. 1862. in-8.

Вопросъ о значеніи большихъ чиселъ, употребляемыхъ индусами, разобранъ въ статьѣ: *Albrecht Weber*, Vedische Angaben über Zeittheilung und hohe Zahlen., помѣщенной въ „Zeitschrift der deutschen Morgenländischen Geselschaft“ за 1861 г.

*) Извѣстный оріенталистъ Кольбрукъ (Henri Thomas Colebrooke) род. въ 1765 г., умеръ въ 1835 г. Въ 1782 г. онъ отправился въ Индію, гдѣ занималъ мѣсто секретаря Остъ-Индской Компаніи, потомъ онъ занималъ должность судьи въ Бенгалѣ и наконецъ въ 1805 г. верховнаго судьи въ Калькуттѣ. Въ 1797 г. Кольбрукъ издалъ собраніе индусскихъ законовъ, въ 4-хъ томахъ. Онъ написалъ много сочиненій, изъ которыхъ наиболѣе извѣстны: „Miscellaneous essays, Lond. 1827, 2-vol. in-8“, санскритскій словарь; грамматика Панини и мн. др. Во время бытности своей въ Индіи Кольбрукъ собралъ множество древнихъ рукописей. Пробывъ болѣе 30 лѣтъ въ Индіи, Кольбрукъ возвратился въ 1816 г. въ Англію, гдѣ основалъ Азіатское Общество въ Лондонѣ.

**) *Санскритскій* языкъ это собственно языкъ классическій, ученый. Обыкновенный же языкъ, народное нарѣчіе, это *пракритъ*, который раздѣляется на нѣсколько нарѣчій.

минали о томъ, что пандиты обманывали европейскихъ ученыхъ, выдавая за свои собственныя сочиненія, заимствованное изъ иностранныхъ сочиненій. Объ этомъ упоминаетъ еще Альбируни, арабскій писатель XI в., сопровождавшій Махмуда во время его похода на Индостанъ *); онъ разсказываетъ, что имъ были переведены для индусовъ, нѣкоторые отрывки изъ сочиненій Евклида и Птоломея, но брамины немедленно переложили ихъ на стихи и представили въ такой видоизмѣненной формѣ, что онъ самъ едва могъ узнать свои переводы. Миссіонеры упоминаютъ также объ астрономическихъ таблицахъ Лагира, переведенныхъ на санскритскій языкъ, но индусскіе ученые астрономы выдаютъ ихъ за свое собственное изобрѣтеніе; Кольбрукъ, а также другіе ученые упоминаютъ, что они нерѣдко дѣлались жертвами обмана пандитовъ. Обманы были еще тѣмъ не трудны, что большая часть сочиненій индусовъ написаны на пальмовыхъ листьяхъ *(oles)*, изъ которыхъ потомъ сшивали книги; листья эти всегда легко подмѣнить и придать имъ болѣе древній видъ. Подобные факты необходимо заставляютъ относиться весьма осторожно къ вопросамъ, гдѣ дѣло идетъ объ индусскомъ происхожденіи. Седильо даже утверждаетъ, что легенды о Кришнѣ *(Kristna)* и сопровождающіе ее комментаріи появились уже тогда, когда христіанство проникло въ Индостанъ; онъ полагаетъ, что не христіане заимствовали у индусовъ: монастыри, исповѣдь, соборы и т. п., а совершенно обратно индусы у христіанъ. Извѣстный А. Веберъ, посвятившій всю свою жизнь изученію санскритской литературы замѣчаетъ, что есть основанія предполагать, что индусы заимствовали содержаніе своихъ древ-

*) Альбируни сопровождалъ халифа Махмуда во время похода въ Индію, предпринятаго въ началѣ XI в. Махмудъ высоко цѣнилъ науки и пригласилъ для участія въ своей экспедиціи многихъ ученыхъ, въ томъ числѣ Альбируни, и извѣстнаго врача Авиценну, занимавшихся въ то время, совмѣстно, изученіемъ медицины, математики и философіи, въ городѣ Каризмѣ при устьяхъ Оксуса. Но на предложеніе Махмуда Авиценна несогласился. Альбируни былъ основательно знакомъ съ греческимъ и санскритскими языками и имѣлъ самое многостороннее образованіе. Онъ авторъ многихъ сочиненій и въ томъ числѣ сочиненія о состояніи литературы и наукъ вообще въ Индіи во время прихода арабовъ; сочиненіе это написано Альбируни въ Индіи, въ 1031 г.

По словамъ Абульфараги, въ его „Арабской хроникѣ“, Альбируни перевелъ нѣкоторыя изъ арабскихъ ученыхъ сочиненій на санскритскій языкъ. Абульфарагъ считаетъ его однимъ изъ самыхъ образованныхъ и ученыхъ людей своего времени. Онъ упоминаетъ также объ его астрономическихъ наблюденіяхъ, произведенныхъ въ Газнѣ, Кабулѣ, Пешаварѣ и другихъ городахъ.

Арабами было обращено особенное вниманіе на изученіе наукъ индусовъ, къ сожалѣнію объ этомъ существуетъ весьма мало указаній. Слѣды господства арабовъ въ Индіи сохранились до сихъ поръ, такъ напр. въ Дели ими была основана великолѣпная библіотека.

нѣйшихъ астрономическихъ сочиненій, извѣстныхъ подъ именемъ *Сидгантъ*, изъ греческихъ сочиненій. Въ подтвержденіе подобныхъ мнѣній нѣкоторые ученые указываютъ на отрывокъ изъ сочиненія астрономическаго содержанія, написаннаго Варага-Мигирой, жившимъ въ VI в., въ которомъ сказано: „хотя греки нечистые, но тѣмъ не менѣе они достойны уваженія за услуги, оказанные ими наукамъ; тѣмъ болѣе брамины заслуживаютъ вниманія, такъ какъ кромѣ познаній въ наукахъ, они соединяютъ въ себѣ еще чистоту души". На этотъ отрывокъ обратилъ вниманіе еще Альбируни, а впослѣдствіи Кольбрукъ и Рено *).

Другіе ученые противнаго мнѣнія, такъ напримѣръ, извѣстный Вепке утверждалъ, что Архимедъ свое сочиненіе „О числѣ песчинокъ" заимствовалъ изъ индусскихъ источниковъ. На послѣднее мнѣніе снова обратили вниманіе ученые въ настоящее время **).

Познакомившись съ методами и пріемами индусскихъ математиковъ, мы увидимъ, что едва-ли можно съ вѣроятностью допустить, чтобы индусскіе ученые заимствовали всѣ свои познанія у греческихъ философовъ, или обратно. Весьма можетъ быть, что первоначальныя—основныя зачатки математическихъ наукъ у индусовъ обязаны своимъ происхожденіемъ изъ-внѣ. На развитіе математическихъ наукъ у индусовъ, могли оказать съ одной стороны вліяніе познанія египтянъ и грековъ, съ другой—халдеевъ. Такое вліяніе несомнѣнно существовало, но во всякомъ случаѣ не подлежитъ сомнѣнію, что методы и пріемы индусскихъ ученыхъ такъ своеобразны и представляютъ такъ мало сходства съ пріемами древнихъ греческихъ геометровъ, что необходимо допустить, что развитіе индусской математики шло вполнѣ самостоятельно безъ всякаго посторонняго вліянія.

---

*) Въ послѣднее время появилась интересная статья: „*Leon Rodet,* l'Algèbre d'Al-Khârizmi et les méthodes indiennes et grecque", помѣщенная въ Journal Asiatique, T. XI, за 1878 г., въ которой авторъ положительно утверждаетъ, что первоначальныя свои свѣдѣнія въ математическихъ наукахъ индусы заимствовали изъ сочиненій древнихъ греческихъ математиковъ.

Выраженіе для площади треугольника въ функціи его сторонъ, а также теорія многоугольниковъ вписанныхъ въ кругъ была изложена въ сочиненіи Герона Старшаго „О діоптрѣ", а также въ III-й части его „Метрики", на что мы уже указывали говоря о трудахъ Герона Старшаго на стр. 114—119 настоящаго сочиненія. Мартенъ въ своемъ замѣчательномъ изслѣдованіи о трудахъ Герона (*H. Martin*, Recherches sur la vie et les ouvrages d'Héron l'Alexandrie, ect, напечатано въ Mémoires présentés par divers savants a l'Académie des Inscriptions et Belles-Lettres, T. IV. Paris. 1854) положительно утверждаетъ, что сочиненія Герона были извѣстны индусамъ и что выраженіе для площади треугольника въ функціи сторонъ они заимствовали изъ его сочиненій. Впрочемъ, необходимо замѣтить, что подобный взглядъ не раздѣляютъ многіе ученые, въ томъ числѣ извѣстный Ганкель.

**) *F. Woepcke,* Mémoire sur la propagation des chiffres indiens. Paris. 1863. in-8.

Самое лучшее представленіе объ индусской математикѣ можно составить познакомившись съ содержаніемъ извѣстныхъ въ настоящее время сочиненій математическаго и астрономическаго содержанія, написанныхъ индусскими учеными. Къ сожалѣнію, до сихъ поръ извѣстны весьма немногія сочиненія математическаго содержанія, написанныя на санскритскомъ языкѣ *).

Самыя древнія, изъ извѣстныхъ до сихъ поръ сочиненій на санскритскомъ языкѣ, въ которыхъ можно найти слѣды познаній индусовъ въ математическихъ наукахъ, это *Калпасутра (Kalpasûtra)*, т. е. сборникъ въ которомъ указаны правила какъ производить жертвоприношенія. При этомъ сочиненіи приложено другое маленькое сочиненіе геометрически-теологическаго содержанія, въ которомъ даны правила какъ строить жертвенники, сочиненіе это носитъ названіе *Сулвасутра (Çulvasûtra)*, т. е. „Правила веревки". Въ настоящее время извѣстны три подобные сборника, составленные *Бодгаяна (Baudhâyana)*, *Апастамба (Âpastamba)* и *Катіаяна* (*Kâtyâyana*). Къ сожалѣнію неизвѣстно время когда жили поименованныя лица. Нѣкоторые ученые полагаютъ, что они современники извѣстнаго грамматика Панини, жившаго по мнѣнію нѣкоторыхъ во II в. до Р. Х., а по мнѣнію другихъ во II в. по Р. Х. Весьма вѣроятно, что подобные сборники были составлены вскорѣ послѣ того, какъ написаны были Веды, т. е. священныя книги индусскихъ браминовъ. Веды же составлены около 1500 л. до Р. Х.

Изученіемъ и изслѣдованіемъ содержанія „Правилъ веревки" занимался Тибо, издавшій три извѣстные въ настоящее время подобные сборника **).

---

*) Европейцы познакомились съ математическими сочиненіями индусовъ только въ концѣ прошлаго столѣтія благодаря трудамъ Кольбрука, Страхея и Телера, написавшихъ слѣдующія сочиненія:

Bija Ganita, or the Algebra of the Hindus, by *Edv. Strachey.* London, 1813. in-4.

Lilavati or a treatise on Arithmetic and Geometry by Bhascara Acharya, translated from the original sanscrit by *J. Taylor.* Bombay, 1816, in-4.

Algebra, with Arithmetic and Mensuration, from the sanscrit of Brahmegupta and Bhascara; translated by H. T. Colebrooke. London, 1817, in-4.

Изъ поименованныхъ сочиненій особеннаго вниманія заслуживаютъ труды Кольбрука. Много интересныхъ свѣдѣній о математикѣ индусовъ также можно найти въ сочиненіи: *Buchner*, De Algebra Indorum. Elbing, 1821.

Въ послѣднее время „Сидгантацирамани" Баскары была переведена въ Калькуттѣ *Wilkinson*'омъ и *Bâpû Deva Çâstrî* и напечатана въ Bibliot. indic., new. series, № 13, 28 за 1862 г. Другое сочиненіе „Сурія-Сидганта" было переведено и комментировано *Bourgess*'омъ и напечатано въ Journ. of the Amer. orient. soc. T. VI, Newhaven. 1860. Первыя четыре главы сочиненія Баскары были также переведены *Brockhaus*'омъ и напечатаны въ Berich. der K. Sächs. Gesellsch. d. Wissensch. 1852.

**) Изъ числа такихъ сочиненій въ настоящее время изданы три, имено: „The S'ulva-

Правильное построеніе жертвенника считалась у браминовъ дѣломъ первостатейной важности; малѣйшая неправильность въ направленіи расположенія или размѣрахъ различныхъ частей жертвенника, по понятіямъ индусскихъ браминовъ, влекло за собою непринятіе жертвоприношенія богами, о чемъ имъ страшно даже было подумать. Благодаря такимъ понятіямъ возникла цѣлая наука о построеніи жертвенниковъ или какъ ее назвалъ Роде „ведическая геометрія", остатки которой дошли до насъ въ сохранившихся Сулвасутрахъ. При построеніи жертвенниковъ прежде всего проводилась главная—основная линія, т. е. ось симметріи фигуры основанія жертвенника. Линія эта была всегда направлена съ Запада на Востокъ и носила названіе „линіи (ребра) спины *(prâci)*". Площадь основанія жертвенниковъ обыкновенно имѣла форму какого нибудь животнаго, какъ напр. птицы, черепахи и т. п. Различныя части основанія, даже если оно имѣетъ правильную геометрическую форму, носятъ названія различныхъ частей фигуры животнаго, такъ напр. бедро, ребро, плечо и т. д. Направленіе главной оси жертвенниковъ, т. е. линіи идущей съ Запада на Востокъ, опредѣляли наблюденіемъ тѣни вертикально-стоящаго стержня до и послѣ полудня. Подобный пріемъ примѣнялся также Витрувіемъ. Изъ содержанія нѣкоторыхъ правилъ Сулвасутръ видно, что автору ихъ была извѣстна теорема Пиѳагора. Она является у него въ слѣдующей формѣ и выражена въ слѣдующихъ словахъ: „веревка, проведенная наискось въ продолговатомъ квадратѣ образуетъ тоже, что образуютъ вмѣстѣ, каждая отдѣльная изъ мѣръ: продольныхъ и поперечныхъ". Какъ не темно это выраженіе, но безъ сомнѣнія это есть предложеніе Пиѳагора, такъ какъ далѣе авторъ продолжаетъ: „это мы познаемъ на числахъ: 3 и 4, 12 и 5, 15 и 8, 7 и 24 12 и 35, 15 и 36".

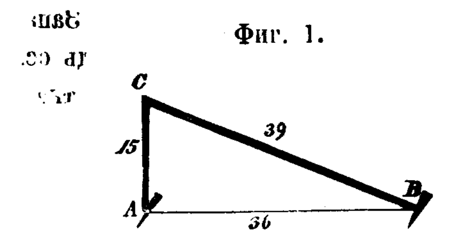
При построеніи жертвенниковъ примѣняются треугольники, коихъ стороны 3, 4, 5 и 5, 12, 13, для проведенія перпендикулярныхъ линій. Бодгаяна выражаетъ это терминомъ „провесть плечо къ линіи спины". Авторъ „Правилъ веревки" вмѣсто того, чтобы говорить, подобно намъ „квадратъ построенный на линіи", выражаетъ это въ слѣдующихъ словахъ: „то что образуется". Мы уже видѣли, что теорему Пиѳагора онъ выражаетъ словами: „то, что образуется на двухъ сторонахъ, равно тому, что образовано на діагонали".

Вышеуказаннымъ пріемомъ находится направленіе восточно-западной линіи также въ Суріе-Сидгантѣ. Когда эта линія найдена, то къ ней перпендикулярная находится при помощи веревки, пользуясь теоремой Пиѳагора. Пріемъ заключается въ слѣдующемъ примѣрѣ: пусть длина восточно-западной линіи 36 падасовъ *(padas)*; въ обоихъ концахъ этой линіи вбиваютъ колья въ землю. Къ этимъ кольямъ прикрѣпляютъ концы веревки длиною въ 54 падаса, на которой предварительно на разстояніи 15 падасовъ отъ одного изъ концевъ сдѣланъ узелъ. Если теперь натянуть веревку на поверхности земли, держа за узелъ, то получается прямой уголъ при концѣ восточно-западной линіи (фиг. 1). Пріемъ этотъ былъ извѣстенъ,

---

sûtras by *G. Thibaut.* Reprinted from the Journal, Asiatic Society of Bengal, Part. I for 1875. Calcutta, 1875". Вопросомъ этимъ также занимался Канторъ въ своихъ: „Gräkoindische Studien", помѣщенныхъ въ „Zeitschrift für Mathematik und Physik", T. XXII, 1877.

Фиг. 1.



какъ мы уже замѣтили выше, халдеямъ и египтянамъ. Подобнымъ же пріемомъ строилъ прямые углы Геронъ Старшій.

Въ Сулвасутрахъ показаны также правила обращенія одной фигуры въ другую ей равновеликую, а также увеличеніе или уменьшеніе фигуръ въ извѣстномъ отношеніи. Знаніе этого было необходимо, такъ какъ жертвенники должны [illegible]ыли быть съ поверхностями различной величины. У индусовъ повторяе[illegible]ся тоже, что и у древнихъ грековъ при рѣшеніи извѣстной задачи „удвоенія куба", рѣшеніе которой повело къ знакомству съ коническими сѣченіями, о которыхъ нѣтъ и слѣдовъ у индусскихъ математиковъ. Индусскіе ученые ограничились умѣніемъ увеличить въ кратное число разъ данную г[illegible]секую фигуру, или иными словами найти квадратный корень. Подобны[illegible] задачи они умѣли рѣшать ариѳметически и геометрически. Примѣнить ж[illegible] геометрическій методъ при извлеченіи кубическихъ корней, которые они, [illegible]ъ мы увидимъ ниже, извлекали съ большимъ умѣніемъ, представляло[illegible] имъ невозможнымъ, благодаря полному незнакомству ихъ съ коническ[illegible] сѣченіями.

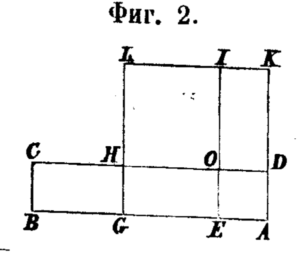
Геомет[illegible]ески извлеченіе квадратныхъ корней Бодгаяна выражаетъ слѣдующим[illegible]авиломъ: веревка натянутая наискось равносторонняго прямоугольник[illegible]етъ квадратъ двойной площади. Веревка натянутая наискось продол[illegible]таго прямоугольника даетъ двѣ площади, которыя дѣлаютъ веревки, на[illegible]тыя вдоль большей и меньшей изъ сторонъ. Для поясненія втораго случа[illegible] Бодгаяна приводитъ числа: 3 и 4, 12 и 5, 15 и 8, 7 и 24, 12 и 35, 15 и 36, которыя представляютъ стороны прямоугольника. Изъ сказаннаго ясно, что Бодгаяна доказываетъ Пиѳагорову теорему не на пра-

моугольномъ треугольникѣ, а на прямоугольникѣ, при чемъ онъ различаетъ два случая, именно, когда катеты равны и когда они неравны *).

Приведенныя нами предложенія находятъ примѣненіе въ Сулвасутрахъ при построеніи жертвенниковъ, при чемъ въ большинствѣ случаевъ требуется рѣшить одинъ изъ слѣдующихъ двухъ вопросовъ: требуется обратить данную фигуру въ другую ей равновеликую, или же извѣстную длину нужно увеличить или уменьшить на столько, чтобы квадратъ на ней построенный увеличился въ отношеніи $1:m$. Нахожденіе стороны квадрата въ 2, 3, 10, 40 большаго даннаго легко найти при помощи теоремы Пиѳагора. Прилагая послѣдовательно теорему Пиѳагора сначала къ прямоугольному равнобедренному треугольнику, а потомъ снова строя на этой гипотенузѣ, принятой за катетъ, равнобедренный треугольникъ и т. д., мы послѣдовательно получимъ соотвѣтствующія величины гипотенузъ, или какъ онѣ названы въ Сулвасутрахъ: *dvikaranî* $=\sqrt{2}$, *trikaranî* $=\sqrt{3}$, *daçakaranî* $=\sqrt{10}$, *catvarinçatkaranî* $=\sqrt{40}$ и т. д.

Пріемъ, употребленный Бодгаяна, для обращенія одной фигуры въ другую ей равновеликую, существенно отличается отъ методовъ употребляемыхъ греческими геометрами. При обращеніи прямоугольника въ равновеликій квадратъ Бодгаяна пользуется только Пиѳагоровой теоремой **). Сущность его пріема заключается въ слѣдующемъ: отъ даннаго прямоугольника $ABCD$ отрѣзываютъ квадратъ $ADOE$, коего сторона $AE=AD$. Оставшуюся часть прямоугольника $EOCB$ при помощи прямой GH дѣлятъ пополамъ и лѣвую часть $GHCB$ прикладываютъ сверху къ маленькому квадрату $ADOE$, при чемъ она приметъ положеніе $DOIK$. Такимъ образомъ прямоугольникъ $ABCD$ обращенъ въ гномонъ $AGHOIKA$ ***), который

Фиг. 2.



*) Канторъ обращаетъ вниманіе на то, что точно такимъ же образомъ доказываетъ теорему Пиѳагора Геронъ Старшій въ своей Геометріи. Весьма вѣроятно, что и Пиѳагоръ обнаружилъ справедливость своего предложенія первоначально на квадратѣ и прямоугольникѣ.

**) Задачу эту Евклидъ въ своихъ „Началахъ" рѣшаетъ совершенно иначе. Онъ опускаетъ перпендикуляръ изъ точки на окружности на діаметръ. См. Пред. 14, Кн. 2 „Начала Евклида" стр. 131.

***) Подъ именемъ гномона въ „Началахъ" Евклида понимаютъ фигуру выдѣленную изъ квадрата, какъ напр. фигура $KAGHOIK$ (фиг. 16).

легко превратить въ квадратъ при помощи теоремы Пиѳагора. Особеннаго названія для гномона Бодгаяна не употребляетъ, онъ говоритъ прямо „разность двухъ квадратовъ $AKLG$ и $OILH$ *)" (фиг. 2).

Особенное вниманіе обратили индусскіе математики на извлеченіе квадратныхъ корней, которое, какъ извѣстно, геометрически всегда возможно, но ариѳметически часто выполнимо только по приближенію, до какой угодно степени точности. Степень приближенія полученная Бодгаяна и Апастамба при извлеченіи $\sqrt{2}$ вполнѣ достаточна въ практическихъ примѣненіяхъ и весьма близка къ истинной величинѣ. Выраженіе, данное ими для $\sqrt{2}$ заслуживаетъ особеннаго вниманія, оно слѣдующее:

$$\sqrt{2}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3.4}-\frac{1}{3.4.34}\ ^{**}).$$

Самые интересные вопросы Сулвасутръ относятся къ попыткамъ индусскихъ математиковъ рѣшить задачу о равенствѣ прямолинейной и круглой фигуръ. Вопросъ этотъ интересенъ какъ съ ариѳметической, такъ и съ геометрической точекъ зрѣнія. Греческіе геометры, какъ извѣстно, пытались рѣшить вопросъ о превращеніи даннаго круга въ равновеликій квадратъ, т. е. задачу извѣстную подъ именемъ *квадратуры круга*, индусскіе же математики въ Сулвасутрахъ стремятся рѣшить обратный вопросъ, т. е. превращеніе даннаго квадрата въ равновеликій кругъ; вопросъ этотъ можно назвать *циркулатурой квадрата*. Рѣшеніе данное въ Сулвасутрахъ состоитъ въ слѣдующемъ: въ данномъ квадратѣ $ABCD$ проводятся діаго-

*) Въ сочиненіяхъ Баскары также встрѣчается гномонъ, но особеннаго термина для его обозначенія нѣтъ. Канторъ полагаетъ, что гномонъ указываетъ на греческое вліяніе.

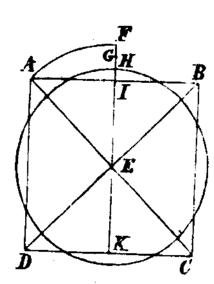
**) Теонъ Смирнскій для $\sqrt{2}$ находитъ слѣдующія послѣдовательныя приближенія $\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \ldots\ldots$ Послѣднее, изъ написанныхъ выраженій, есть ничто иное какъ часть выраженія для $\sqrt{2}$ данная Бодгаяни, т. е. $\frac{17}{12}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3.4}$. Выраженіе, данное Теономъ, Бодгаяна представляетъ въ видѣ единицы и суммы дробей съ числителями равными единицей.

Происхожденіе послѣдняго члена $\frac{1}{3.4.34}$ выраженія для $\sqrt{2}$, Канторъ объясняетъ слѣдующимъ образомъ: величина $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3\,4}=\frac{17}{12}$ слишкомъ велика для $\sqrt{2}$, такъ какъ $\left(\frac{17}{12}\right)^2=2\frac{1}{144}$; болѣе же точная величина найдется если изъ приведеннаго выше выраженія для $\sqrt{2}$ вычтемъ $\frac{1}{144}:2\frac{17}{12}=\frac{1}{144}:\frac{34}{12}=\frac{1}{12.34}$, послѣдняя же дробь есть ничто иное какъ послѣдній членъ выраженія, даннаго Бодгаяна для $\sqrt{2}$, т. е. $\frac{1}{3.4.34}$.



нали AC и BD (фиг. 3), чрезъ точку ихъ пересѣченія E проведена прямая KI, параллельная сторонамъ AD и BC квадрата. Изъ точки E, какъ

Фиг. 3.



изъ центра, радіусомъ равнымъ AE, опишемъ дугу AF круга, которая пересѣчетъ продолженіе прямой KI въ точкѣ F. Отрѣзокъ IF въ точкахъ G и H дѣлятъ на три равныя части и радіусомъ EH описываютъ кругъ, который и принимаютъ за искомый—равновеликій данному квадрату $ABCD$.

Построенію этому Канторъ стремится дать слѣдующее численное толкованіе: отрѣзокъ IF раздѣленный на три равныя части, онъ предполагаетъ, былъ принятъ за 3, а потому: $EA = EI + 3$ или $EI . \sqrt{2} = EI + 3$, слѣдовательно:

$$EI^2 - 6EI = 9$$

или

$$EI = 3 + \sqrt{18}$$

принимая въ первомъ приближеніи $\sqrt{18} = 4$, находимъ $EI = 7$ или $EA = 10$, т. е. $\sqrt{2} = \frac{10}{7}$. Если такое предположеніе справедливо, то сторона квадрата равна 14, діагональ—20, а діаметръ равновеликаго ему круга—16. Площадь же этого круга выразится чрезъ:

$$14^2 = (16-2)^2 = \left(16 - \frac{16}{8}\right)^2$$

Послѣднее выраженіе заключаетъ въ себѣ двойное правило, именно: 1) при рѣшеніи вопроса о циркулатурѣ квадрата за діаметръ круга принимаютъ $\frac{8}{10}$ діагонали квадрата, и во 2) при рѣшеніи вопроса о квадратурѣ круга, за сторону квадрата принимаютъ $\frac{7}{8}$ діаметра круга *).

---

*) Подобный пріемъ примѣняется также въ папирусѣ Ринда, гдѣ сторону квадрата, равновеликаго данному кругу, принимаютъ равной $\frac{8}{9}$ діаметра этого круга (см. стр. 337).

Для нахожденія стороны квадрата, равновеликаго данному кругу, Бодгаяна пользуется еще болѣе точнымъ выраженіемъ, именно сторону квадрата онъ принимаетъ равной не $\frac{7}{8}$ діаметра даннаго круга, а вводитъ еще въ выраженіе діаметра множитель:

$$\frac{7}{8} + \frac{1}{8.29} - \frac{1}{8.29.6} + \frac{1}{8.29.6.8}$$

Послѣдніе три члена этого выраженія получились вслѣдствіи того, что Бодгаяна желая выразить примѣненное имъ построеніе формулой пользуется не выраженіемъ:

$$\sqrt{2} = \frac{10}{7} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{3.4.7}$$

а вышеприведеннымъ уже:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3.4} - \frac{1}{3.4.34} = \frac{577}{408}$$

Изъ фигуры 17 видно, что:

$$EA = EI . \sqrt{2} \quad , \quad FI = EI(\sqrt{2} - 1) \quad , \quad HI = EI\frac{\sqrt{2}-1}{3},$$

$$EH = EI + IH = EI . \frac{\sqrt{2}+2}{3} \quad , \quad EI = \frac{3}{2+\sqrt{2}} . EH$$

въ выраженіяхъ этихъ EI есть половина стороны квадрата, а EH радіусъ равновеликаго ему круга. Послѣднее изъ написанныхъ выраженій представляетъ соотношеніе между половиной стороны квадрата и радіусомъ круга; удвоенное это выраженіе представитъ соотношеніе между стороной квадрата и діаметромъ равновеликаго ему круга, оно зависитъ также отъ того же множителя $\frac{3}{2+\sqrt{2}}$, что и первое соотношеніе. Подставляя въ этотъ множитель вмѣсто $\sqrt{2}$ найденное выше его значеніе $\frac{577}{408}$, найдемъ, что онъ выразится чрезъ:

$$\frac{1224}{1393} = \frac{7}{8} + \frac{1}{8.29} - \frac{1}{8.29.6} + \frac{1}{8.29.6.8} - \frac{41}{8.29.6.8.1393}$$

Послѣдній членъ написаннаго выраженія разнится всего на $\frac{1}{34}$ отъ предшествующаго и по своей числовой величинѣ незначителенъ, по этой причинѣ Бодгаяна вѣроятно пренебрегъ имъ.

Кромѣ указаннаго правила для нахожденія квадратуры круга, находится еще другое, которое одинаково примѣняется Бодгаяна, Апастамба и Катаяна. Правило это заключается въ слѣдующемъ: „раздѣли (діаметръ)

на 15 равныхъ частей и отнми 2 части, это (т. е. то, что останется) и представить приближенно сторону квадрата *)".

Въ Сулвасутрахъ отношеніе окружности къ діаметру, т. е. π, полагается равнымъ 3, такъ какъ площадь квадрата или равновеликаго ему круга предполагается равной утроенному квадрату, построенному на радіусѣ. Мы уже выше упоминали, что халдейскіе математики полагали $\pi = 3$, а потому весьма вѣроятно, что это выраженіе перешло отъ нихъ къ индусамъ.

Познакомившись съ основными началами ведической Геометріи можно видѣть какъ важны Сулвасутры для исторіи развитія математическихъ наукъ у индусовъ. Весьма вѣроятно, что со временемъ когда ученые познакомятся съ другими сочиненіями подобнаго же содержанія станутъ извѣстны новыя данныя, которыя прольютъ свѣтъ и до нѣкоторой степени объяснятъ характеръ и направленіе принятое математическими науками у индусовъ и своеобразность ихъ методовъ и пріемовъ. Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію собственно математическихъ сочиненій, написанныхъ индусскими учеными.

Самый древній изъ математиковъ, о которомъ упоминается въ индусскихъ лѣтописяхъ, это *Аріабгатта*, написавшій около 550 г. по Р. Х. **) сочиненіе математически-астрономическаго содержанія, подъ заглавіемъ „*Аріабгаттіамъ*". Изъ другихъ сочиненій мы познакомимся съ трудами *Брамагупты*, жившаго въ VII в., и *Баскары* жившаго въ XI в. ***). До послѣд-

*) Канторъ обращаетъ вниманіе, что подобный пріемъ приближенія встрѣчается у Герона Старшаго при нахожденіи высоты равносторонняго треугольника. Отъ Герона онъ перешелъ къ римскимъ землемѣрамъ и примѣняется Колумеллой.

**) Въ настоящее время вполнѣ точно извѣстно время, когда жилъ Аріабгатта, благодаря указанію, находящемуся въ III-й главѣ его сочиненія Аріабгаттіамъ. Онъ говоритъ „когда прошло шестьдесятъ разъ шестьдесятъ и истекло три юги, я могъ безъ всякаго сомнѣнія насчитать двадцать три года своего существованія". Изъ этого видно, что Аріабгатта родился въ 3600—23=3578 году калиюги. Начало настоящаго лѣтоисчисленія индусовъ совпадаетъ съ 78 годомъ нашей эры, и по словамъ Брамагупты началось въ 3179 калиюги, слѣдовательно первый годъ новой эры приходится на 3101 или 3102 гг. до Р. Х., а потому Аріабгатта родился въ 3577 – 3102 гг. калиюги или въ 475 нашей эры. Сочиненіе его можно отнести къ началу VI в.

Аріабгатта родился въ Паталипутрѣ (городъ цвѣтовъ), древней столицѣ историческихъ государей Индостана, въ которомъ процвѣтала школа ученыхъ и гдѣ вѣроятно преподавалъ свои ученія также Аріабгатта. Во время Аріабгатты процвѣтала еще другая школа, въ Уиянии (Ujjayini), представителемъ этой школы былъ Варага-Мигира, написавшій сочиненія астрономическаго и математическаго содержанія.

***) Времена когда жили Аріабгатта, Брамагупта и Баскара установлены вполнѣ точно

няго времени было обращено болѣе вниманія на сочиненія послѣднихъ двухъ, изъ упомянутыхъ нами ученыхъ, хотя во многихъ частяхъ трактаты ихъ содержатъ только дальнѣйшее развитіе, сказаннаго уже прежде Аріабгаттой. На основаніи сказаннаго, мы сначала разсмотримъ сочиненіе Аріабгатты, а затѣмъ уже перейдемъ къ сочиненіямъ Брамагупты и Баскары.

Аріабгатта. Первый обратившій должное вниманіе на сочиненіе Аріабгатты „*Аріабгаттіамъ*" былъ профессоръ Лейденскаго университета Кернъ, издавшій его текстъ въ 1874 г. на санскритскомъ языкѣ. Къ тексту приложенъ пространный комментарій „***Bhatadîpikâ***", написанный на это сочиненіе *Парамадисварой (Paramâdiçvara)*, относительно котораго Керну неудалось собрать никакихъ указаній *).

„Аріабгаттіамъ" состоитъ изъ четырехъ частей, которыя заключаютъ всего 123 строфы. Содержаніе, каждой изъ этихъ частей, слѣдующее:

I—„Небесная гармонія",—это собраніе численныхъ таблицъ.

II—„Начала счисленія".

III—„О времени и его измѣреніи".

IV—„Шары".

Въ настоящее время переведена только вторая часть **) „Аріабгаттіама" французскимъ ученымъ *Роде* (Rodet), написавшимъ къ ней комментарій ***) въ 1879 г. Познакомимся вкратцѣ съ содержаніемъ переведенной

благодаря изслѣдованіямъ: ***Bhaû Dajî***, On the age and authenticity of the works of Varâhamihira, Brahmegupta, Bhattotpala and Bhaskarâchârya, помѣщеннымъ въ „Journal of the Asiatic Society" за 1865 г.

*) Кромѣ сочиненія „Аріабгаттіамъ" Аріабгатта написалъ еще другое, заглавіе котораго: „*Десять куплетовъ (Daçagîti)*"; въ настоящее время, по словамъ Керна, сохранились еще рукописные списки этого сочиненія.

**) Первая часть „Аріабгаттіамма" заключаетъ собраніе численныхъ таблицъ, имѣющихъ примѣненіе при астрономическихъ вычисленіяхъ. Въ III-й части въ самомъ началѣ говориться о раздѣленіи времени. Время авторъ дѣлитъ на слѣдующія части: „годъ имѣетъ двѣнадцать мѣсяцевъ; мѣсяцъ—тридцать дней; день состоитъ изъ шестидесяти *nâdi*, а каждый *nâdi* изъ шестидесяти *vinâdi*". Далѣе Аріабгатта продолжаетъ: „шестьдесятъ долгихъ гласныхъ составляютъ одинъ *vinâdikâ* или же шесть вдыханій".

***) Текстъ второй части „Аріабгаттіама", переведенной Роде, заключаетъ всего 33 правила, изложенныхъ въ стихотворной формѣ, въ самомъ сжатомъ видѣ. Мы полагаемъ не безъинтереснымъ привести здѣсь нѣкоторыя изъ правилъ перевода Роде.

I.—Восхваливъ Браму, Землю, Луну, Меркурія, Венеру, Солнце, Марса, Сатурна и созвѣздія, Аріабгатта въ „Городѣ цвѣтовъ" излагаетъ начала высокочтимой науки, состоящей въ слѣдующемъ.

II.—***Eka***, *daçan, çata, sahasra, ajuta, niyuta, prayuta, kôti, arbuda, vrnda* относительно своего мѣста (положенія), каждое въ десять разъ больше послѣдующаго.

III.—„Квадратъ" *(varga)* есть четыреугольникъ съ равными сторонами; его „плодъ",

части „Аріабгаттіама“, которая укажетъ намъ состояніе математики во время Аріабгаты*).

Въ началѣ второй части авторъ приводитъ названія десяти чиселъ, изъ которыхъ каждое предъидущее въ десять разъ больше послѣдующаго, но далѣе сотень милліоновъ, т. е. 10^8, онъ не идетъ**). Затѣмъ слѣдуютъ опредѣленія квадрата и куба и выраженіе ихъ площади и объема. Аріабгатта говоритъ, что квадратъ есть четырехсторонникъ, съ равными сторо-

т. е. площадь есть, произведеніе двухъ равныхъ чиселъ.—Произведеніе трехъ равныхъ чиселъ есть „кубъ“ (*ghana*—тѣло), и фигура съ двѣнадцатью ребрами.

VI.—Площадь треугольника (трехсторонника) равна произведенію перпендикуляра общаго двумъ отрѣзкамъ (половинамъ), и половины основанія.—Половина этого произведенія умноженная на высоту есть тѣло съ шестью ребрами.

VII.—Половина окружности (*parinâha*) умноженная на половину діаметра (*ardha-vish-kamba*) даетъ площадь круга (*vrtta*).—Этотъ послѣдній умноженный на свой собственный корень (квадратный) выразитъ точно объемъ шара (*gôla*).

IX.—Хорда шестой части окружности (*paridhi*) равна половинѣ діаметра.

X.—Прибавьте 4 къ 100, умножьте на 8, прибавьте еще 62000, это будетъ для діаметра равнаго двумъ миріадамъ (*ayutâs*) приближенная величина окружности.

XI.—Раздѣлите (на равныя части) четверть окружности при помощи треугольника и четыреугольника, то получите на радіусѣ всѣ „полухорды“ (т. е. синусы—*jyâ-ardha*) дугъ (*câpa*), которыя пожелаете.

XIII.—Кругъ получается вращеніемъ. Прямоугольный треугольникъ опредѣляется гипотенузой (*karna*), прямоугольникъ—діагональю (*karna*); горизонтальная линія—уровнемъ, вертикальная - отвѣсомъ.

XX.—Число членовъ есть: (сумма) умноженная на 8 разъ взятую разность, прибавленная къ квадрату избытка дважды взятаго перваго члена надъ разностью. Отъ полученнаго выраженія (взять) корень квадратный, уменьшенный на дважды взятый первый членъ. Полученное выраженіе дѣлятъ на разность, къ этому прибавляютъ 1 и берутъ половину.

XXII.—Послѣдній членъ, этотъ прибавленный къ единицѣ, этотъ увеличенный на число членовъ: отъ произведенія этихъ трехъ чиселъ возьмите одну шестую, это будетъ объемъ квадратной кучи.

XXX.—Разность между числами рупій, принадлежащихъ двумъ лицамъ, раздѣлите на разность предметовъ: частное будетъ стоимость предмета, если имущества ихъ равны.

*) Современникомъ Аріабгатты былъ *Варага-Мигира* (Varâha-Mihira), занимавшійся астрономіей и астрологіей. Варага-Мигира написалъ нѣсколько сочиненій, изъ которыхъ было болѣе извѣстно Сангита (Sanhita), въ которомъ авторъ говоритъ о вліяніи и значеніи кометъ. Варага-Мигира принадлежитъ къ другой школѣ чѣмъ Аріабгатта.

Въ своихъ сочиненіяхъ Варага-Мигира говоритъ, что самый древній, изъ извѣстныхъ ученыхъ носилъ имя Мая (Maya). Самое древнее изъ астрономическихъ сочиненій *Сурія-Сидганта* (Soûrya-Siddhânta) индусскіе ученые приписываютъ Маю; объ этомъ также упоминаетъ Альбируни, къ сожалѣнію онъ не упоминаетъ времени, когда жилъ послѣдній.

**) Пріемъ Аріабгатты подробно изложенъ въ статьяхъ: *Rodet*, Leçons de calcul d'Âryabhata. Journal Asiatique Mai—Juin 1879.—*Rodet*, Sur la véritable signification de la notation numérique inventée par Âryabhata. Jour. Asiat. Octobre—Novem.—Décem. 1880.

нами, площадь же его есть произведеніе двухъ равныхъ чиселъ. Произведеніе трехъ равныхъ чиселъ есть кубъ, или фигура съ двѣнадцатью ребрами. Всѣ фигуры и всѣ тѣла Аріабгатта выражаетъ числомъ сторонъ и реберъ. Далѣе показано правило для извлеченія квадратныхъ и кубическихъ корней. Площадь треугольника Аріабгатта полагаетъ равной половинѣ произведенія основанія на высоту. Для объема тетраедра дано неправильное выраженіе. Площадь круга онъ полагаетъ равной произведенію половины окружности на радіусъ. Для шара же выраженіе объема дано неправильное, именно объемъ шара принимается равнымъ $\sqrt{\pi^3}.R^3$. Принявъ это выраженіе за объемъ шара, отношеніе окружности къ діаметру выразится чрезъ $\pi = \frac{16}{9}$.

Далѣе слѣдуетъ теорема Пиѳагора, которая выражена въ такой же почти формѣ какъ въ „Правилахъ веревки“. Затѣмъ слѣдуетъ рядъ предложеній, вытекающихъ изъ пиѳагоровой теоремы. Въ 10-мъ правилѣ показано какъ вычислить приближенное отношеніе окружности къ діаметру, которое, сдѣлавъ всѣ дѣйствія указанныя авторомъ, будетъ:

$$\pi = \frac{62832}{20000} = 3.1416$$

Выраженіе это замѣчательно по своей точности и способу какъ оно получается*). Также интересно, что это выраженіе впослѣдствіи дано также Баскарой, но въ сокращенной формѣ, именно:

$$\pi = \frac{3927}{1250}$$

Въ 12-мъ правилѣ показано устройство таблицы синусовъ, которые выражены также, какъ и въ древнѣйшемъ астрономическомъ сочиненіи „Суріѣ-Сидгантѣ“ **). Синусы выражены въ минутахъ, т. е. въ шестидесятич-

*) Число 62832 принятое Аріабгаттой для діаметра равнаго двумъ миріадамъ, или радіуса равнаго одной миріадѣ, весьма интересно въ томъ отношеніи, что указываетъ какъ-бы на греческое происхожденіе, такъ какъ одни греки считали при помощи миріадъ. Но съ другой стороны необходимо обратить вниманіе на то, что выраженіе $\pi = \frac{22}{7}$, данное Архимедомъ, нигдѣ не упоминается Аріабгаттой.

**) Самое древнее изъ астрономическихъ сочиненій индусовъ носитъ названіе (*Сурія-Сидганта* (Sûrya—солнце, Siddhânta—наука, система, знаніе), авторомъ его считаютъ *Асура-Мая* (Asura-Maya—демонъ Мая). Когда жилъ Асура-Мая нельзя сказать положительно, за недостаткомъ какихъ-либо положительныхъ указаній. Варага-Мигира, современникъ Аріабгатты, упоминаетъ Сурію-Сидганту, изъ чего можно заключить, что сочиненіе это было извѣстно въ V в. Въ сочиненіи этомъ многое носитъ слѣды греческаго вліянія, нѣкоторые

нихъ частяхъ. На это слѣдуетъ обратить вниманіе, такъ какъ мы уже выше указали, что халдеи также употребляли шестидесятичную систему счисленія, которая была у нихъ въ большомъ ходу. Также приведены таблицы разностей синусовъ, изъ которыхъ видно, что Аріабгатта дѣлитъ квадрантъ на 24 части, но $3^{0}45' = 225'$ въ каждой. Подобное дѣленіе встрѣчается также и у позднѣйшихъ писателей. Таблица разностей синусовъ, данная Аріабгаттой, тождественна съ таблицой, находящейся въ „Суріѣ-Сидгантѣ". Таблица эта слѣдующая:

Дуги	Синусы	Разности
0	0	
		225′
1	225′	
		224′
2	449′	
		222′
3	671′	
		219′
4	890′	
		215′
5	1105′	
. . .		. .
. . .		. . .
. . .	. . .	. . .
		37′
22	3409′	
		22′
23	3431′	
		7′
24	3438′	

термины напоминаютъ греческія слова. Веберъ въ своей статьѣ „Zur Geschichte der indischen Astrologie" помѣщенной въ „Indische Studien T. II" обращаетъ вниманіе на то обстоятельство, что египетскіе цари изъ династіи Птоломеевъ въ индусскихъ надписяхъ названы Tura-Maya; на основаніи этого онъ высказываетъ предположеніе не есть-ли имя Asura-Maya, измѣненное Tura-Maya, а потому не есть-ли Asura-Maya греческій астрономъ Птоломей, извѣстный авторъ „Альмагеста", жившій во II в. по Р. Х.

Вліяніе грековъ на нѣкоторыя отрасли наукъ индусовъ несомнѣнно. Варага-Мигира говоритъ, что названія различныхъ созвѣздій онъ заимствовалъ у Javaneçkarâcârya, т. е. у греческаго мужа, такъ какъ подъ именемъ yavana слѣдуетъ понимать грековъ. Въ своихъ сочиненіяхъ Варага-Мигира, а также другіе писатели, упоминаютъ городъ Romaka-Pura, т. е. Римъ, а также Javana-Pura, т. е. городъ грековъ—Александрію.

Устройство приведенной таблицы вполнѣ понятно и можетъ быть выражено слѣдующей алгебраической формулой:

$$\Delta_{n+1} = \Delta_n - \frac{S_n}{S_1}$$

гдѣ S_1 выражаетъ синусъ дуги 1 или 225′; формула эта въ примѣненіи ко второму синусу дастъ:

$$449 = 225 + 224 = S_1 + \left(S_1 - \frac{S_1}{S_1}\right)$$

Вопросомъ о таблицахъ синусовъ, бывшихъ въ употребленіи у индусскихъ астрономовъ, много занимался Бургесъ. Изслѣдованія его по этому предмету помѣщены въ его комментаріяхъ на „Суріу-Сидганту" *).

*) Сочиненіе это переведено подъ заглавіемъ: Translation of the Sûrya-Syddhânta; trans. by Rév. *E. B. Burgess*, New-Haven; Connecticut. 1860. in-8. Надъ переводомъ этого сочиненія также много трудился американскій ученый *Whitney*, высказавшій мнѣніе, что содержаніе „Суріи-Сидганты" индусскіе ученые заимствовали изъ греческихъ источниковъ, написанныхъ, во всякомъ случаѣ, ранѣе „Альмагеста" Птоломея. Въ началѣ 1860-хъ годовъ санскритскій текстъ „Суріи-Сидганты" былъ напечатанъ въ сборникѣ „Bibliotheca indica", благодаря трудамъ американца *Fitz Edward Hall'я* и пандита—профессора математики въ „Government College" въ Бенаресѣ *Bâpû-Deva Castri*.

Астрономическій трактатъ „Суріа-Сидганта" написанъ стихами, при чемъ всѣ числа и всѣ вычисленія выражены словами. Такъ какъ числа выражаются различными символическими представленіями, то нѣкоторыя числа выражаются различными словами. Все сочиненіе состоитъ изъ однѣхъ правилъ и указаній хода вычисленій, поясненій и толкованій нѣтъ никакихъ. Въ виду такихъ особенностей чтеніе и изданіе переводовъ „Суріи-Сидганты" было дѣло весьма трудное и требовало необходимо глубокое знакомство съ лингвистическими особенностями санскритскаго языка и основательное знаніе астрономія. Въ настоящее время задача эта рѣшена.

Главные вопросы, рѣшенные въ правилахъ „Суріи-Сидганты", относятся къ опредѣленію для всякаго момента времени положенія солнца, луны и пяти планетъ; предсказывать затмѣнія солнца и луны, а также предсказывать различныя явленія, т. е. астрологическіе вопросы. На сколько извѣстно въ этомъ заключалось изученіе астрономіи въ школахъ браминовъ. Такой характеръ носило изученіе этой науки еще въ XVIII в.

По мнѣнію Вебера, составителю „Суріи-Сидганты" были извѣстны нѣкоторыя изъ сочиненій астрологическаго содержанія, написанныя нѣкоторыми учеными александрійской школы въ началѣ нашей эры. Въ числѣ такихъ сочиненій онъ полагаетъ было извѣстно индусамъ сочиненіе „О рожденіяхъ" александрійскаго астролога *Павла* (Paulus Alexandrinus), жившаго въ 278 г. Нѣкоторыя изъ правилъ I-й главы „Суріи-Сидганты" несомнѣнно носятъ слѣды этого сочиненія. Каждая изъ главъ (adhikâra) „Суріи-Сидганты" занимается извѣстнымъ классомъ вопросовъ. Изъ главъ особеннаго вниманія заслуживаютъ: I—„О среднихъ (мѣстахъ)"; II—„О видимыхъ (мѣстахъ)"; III—„О трехъ вопросахъ"; которые состоятъ 1-й, въ опредѣленіи направленія по которому видимо свѣтило, 2-й, опредѣленіе положенія этого направленія относительно четырехъ главныхъ точекъ горизонта, экватора и эклиптики; и 3-й

Въ 13-мъ правилѣ Аріабгатта излагаетъ теорію гномона. Слѣдующія правила также посвящены этому вопросу. Весьма странно, что Аріабгатта ничего не говоритъ о построеніи гномона.

По поводу теоріи гномона и опредѣленій, данныхъ Аріабгаттой, Парамадисвара въ своихъ комментаріяхъ весьма подробно описываетъ устройство прибора служащаго къ черченію круговъ, а также его употребленіе. Инструментъ этотъ онъ называетъ „ракомъ" *(karkata)*; затѣмъ онъ говоритъ о построеніи треугольниковъ на полѣ при помощи трехъ „палочекъ" *(çalâkâ)*, равныхъ по длинѣ тремъ сторонамъ треугольника; также указаны пріемы для нивеллированія даннаго мѣста, и употребленіе отвѣса *). Изъ словъ комментарія можно заключить, что пріемы эти относятся къ весьма отдаленному времени и были общеизвѣстны.

Въ 18-мъ правилѣ изложено предложеніе, относящееся къ вычисленію затмѣній. Затмѣваемая часть свѣтила названа „выкушеннымъ кускомъ" *(grâsa)*; названіе это произошло отъ того, что по миѳологическимъ представленіямъ индусовъ затмѣнія свѣтилъ происходятъ отъ укушенія свѣтилъ дракономъ *(Râhu)*.

Въ 19-мъ и 20-мъ правилахъ говориться объ ариѳметическихъ прогрессіяхъ. Правила данныя Аріабгаттой весьма интересны въ томъ отношеніи, что это суть тѣ же алгебраическія формулы, которыми пользуются въ настоящее время при нахожденіи суммы и числа членовъ ариѳметическихъ прогрессій. Пояснимъ это подробнѣе.

опредѣленіе момента этого положенія. IV-я глава посвящена луннымъ затмѣніямъ; V-я затмѣніямъ солнца. Въ VII-й главѣ говорится о вліяніи *nakshatras* на судьбу человѣка. Въ VIII-й главѣ разбирается вопросъ „О соединеніяхъ планетъ".

Нѣкоторыя изъ вычисленій, указанныхъ въ правилахъ „Сурія-Сидганты" были передѣланы *Davis*'мъ, а также издателями этого сочиненія *Hall*'емъ и *Bâpû-Deva*, которые на основаніи указанныхъ правилъ вычислили затмѣніе луны, имѣвшее мѣсто 6 февраля 1860 г., и затмѣніе солнца 26 февраля 1854 г. Полученныя ими результаты отступаютъ отъ истинныхъ, такъ какъ данныя, принятыя индусскими учеными, при составленіи правилъ „Сурія-Сидганты" необходимо могли измѣниться въ промежутокъ времени въ 1200 лѣтъ.

*) Пріемъ для нивеллированія, указанный въ комментаріяхъ Парамадисвары, весьма любопытенъ. Дословно онъ слѣдующій: „Сдѣлавъ на глазъ нивеллировку даннаго мѣста, на немъ чертятъ кругъ, внѣ этого круга чертятъ „междукружіе" (т. е. кольцеобразную площадь) шириною въ два или три пальца. Промежутокъ между двумя окружностями углубляютъ и получаютъ выемку; выемку эту наполняютъ водой. Если выемка вся кругомъ наполнена водой въ уровень съ землей, то поверхность земли нивеллирована правильно. Тамъ гдѣ (видно) пониженіе воды поверхность земли приподнята, тамъ гдѣ повышеніе воды поверхность земли ниже. Вотъ".

Пусть S будетъ сумма членовъ ариѳметической прогрессіи, состоящей изъ n членовъ, простирающихся отъ p-го по q-й. Извѣстно, что:

$$S=q\left(a+\frac{q-1}{2}r\right)-p\left(a+\frac{p-1}{2}r\right)$$

$$=(q-p)a+\left[q\frac{q-1}{2}-p\frac{p-1}{2}\right]r$$

$$=(q-p)a+\frac{r}{2}(q^2-p^2-q+p)$$

$$=(q-p)\left[a+\frac{r}{2}(q+p-1)\right]$$

$$=(q-p)\left[a+\left(\frac{q-p-1}{2}+p\right)r\right]$$

$$=n\left[a+\left(\frac{n-1}{2}+p\right)r\right] \qquad (\alpha)$$

Полагая въ послѣднемъ выраженіи $p=0$, находимъ:

$$S=n\left(a+\frac{n-1}{2}r\right)$$

или располагая по убывающимъ степенамъ n, находимъ:

$$n^2r-n(r-2a)-2S=0 \qquad (m)$$

откуда, рѣшая это уравненіе второй степени, находимъ:

$$n=\frac{(r-2a)\pm\sqrt{(r-2a)^2+8Sr}}{2r} \qquad (n)$$

или:

$$n=\frac{1}{2}\left[1+\frac{-2a\pm\sqrt{(r-2a)^2+8Sr}}{r}\right] \qquad (\beta)$$

Выраженія (α) и (β) формулированы Аріабгаттой въ правилахъ 19-мъ и 20-мъ. Правило 20-е мы привели въ примѣчаніи (стр. 16). Выраженія эти Аріабгатта читаетъ справа на лѣво. Изъ выше сказаннаго слѣдуетъ, что во время Аріабгатты было извѣстно рѣшеніе уравненій 2-й степени въ общей формѣ (m):

$$ax^2+bx+c=0$$

рѣшеніе представлялось въ видѣ (n):

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Также заслуживаетъ вниманія, что было извѣстно преобразованіе уравненія (n) къ виду (β), а это показываетъ, что индусскимъ математикамъ было извѣстно производство алгебраическихъ вычисленій и преобразованій.

Въ 21-мъ правилѣ показано вычисленіе числа ядеръ въ треугольной кучѣ. Правила формулированныя Аріабгаттой суть ничто иное какъ слѣдующія алгебраическія формулы:

$$P = \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}$$

и

$$P = \frac{n^3+3n^2+2n}{6} = \frac{(n+1)^3-(n+1)}{6}$$

Послѣдняя формула весьма интересна въ томъ отношеніи, что изъ нея видно, что Аріабгатта умѣетъ совершенно точно найти число ядеръ въ треугольной кучи, сосчитавъ только число ядеръ ребра, между тѣмъ какъ онъ не умѣетъ найти объема тетраедра по данной высотѣ и площади (см. стр. 17) *).

Въ 22-мъ правилѣ формулировано выраженіе для нахожденія числа ядеръ въ кучѣ съ квадратнымъ основаніемъ, т. е. формула:

$$S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1.2.3} \qquad (k)$$

Другая часть этого правила показываетъ, что Аріабгаттѣ извѣстна формула:

$$S_3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = S_1{}^2$$

т. е. сумма кубовъ первыхъ чиселъ равняется квадрату суммы этихъ чиселъ.

Къ 22-му правилу комментаторъ Парамадисвара дѣлаетъ замѣчаніе, въ которомъ говоритъ, что въ выраженіи (k) необходимо принять во вниманіе, что „послѣдній членъ“ (*pada*) и „число членовъ“ (*gaccha*) имѣютъ одно и то же числовое значеніе.

Въ 25-мъ правилѣ дано выраженіе для вычисленія сложныхъ процентовъ. Формула немного разниться отъ употребляемой въ настоящее время, такъ какъ индусы руководствовались иными началами при взыманіи процентовъ; это видно изъ численныхъ примѣровъ.

*) Изъ приведеннаго можно думать, что мнѣніе нѣкоторыхъ ученыхъ, что теорія фигурныхъ чиселъ явилась какъ слѣдствіе умѣнія вычислять площади и объемы, не основательно.

Въ 26-мъ правилѣ говориться о „тройномъ правилѣ“ (*trairâçikam*). Здѣсь же говориться о приведеніи къ одному общему знаменателю. Дѣйствіе это выражено терминомъ: „родъ бытія одного и того же *varna*“. Слово *varna* въ первоначальномъ значеніи означаетъ „цвѣтъ“, но его употребляютъ также въ смыслѣ касты. Въ приведенномъ правилѣ оно примѣняется въ послѣднемъ смыслѣ и означаетъ собою слово „родъ, видъ“.

Въ 28-мъ правилѣ Аріабгатта формулируетъ особый методъ, бывшій весьма распространеннымъ въ Индостанѣ. Методъ этотъ, впослѣдствіи, былъ названъ Баскарой „обратнымъ дѣйствіемъ“ (*vilôma-kriyâ*). Пріемъ состоитъ въ слѣдующемъ: примѣнить въ обратномъ порядкѣ къ данному—извѣстному результату, или же который требуется узнать по условію вопроса, всѣ тѣ обратныя дѣйствія, которыя данныя вопроса указываютъ произвести надъ искомымъ числомъ для полученія результата. Правило, данное Аріабгаттой, пояснено Парамадисварой на слѣдующемъ численномъ примѣрѣ: „Найти число, которое будучи умножено на 3, затѣмъ раздѣлено на 5, прибавлено къ нему 6, извлеченъ изъ него корень, вычтена 1, возвышенное въ квадратъ, дало 4?“.

Результатъ есть 4, или какъ индусскіе математики говорятъ „то что должно видѣть“ (*drçyam*). Послѣднее дѣйствіе, изъ котораго получился этотъ результатъ, было возвышеніе въ квадратъ, слѣдовательно нужно изъ него извлечь корень квадратный, получимъ 2; изъ этого числа была вычтена 1, слѣдовательно нужно ее прибавить, получимъ 3; изъ этого числа былъ извлеченъ корень квадратный, слѣдовательно теперь нужно возвысить въ квадратъ, получимъ 9; къ этому числу было прибавлено 6, слѣдовательно его нужно вычесть, получимъ 3; число это было раздѣлено на 5, теперь нужно умножить, получимъ 15; полученное число было умножено на 3, нужно раздѣлить теперь на 3 и тогда получимъ наконецъ искомое число 5.

Въ 29-мъ правилѣ Аріабгатта формулируетъ пріемъ для производства слѣдующихъ дѣйствій:

$$\begin{aligned} S_4 - d &= a+b+c = m \\ S_4 - a &= b+c+d = p \\ S_4 - b &= a+c+d = q \\ S_4 - c &= a+b+d = s \\ \hline 3a+3b+3c+3d &= m+p+q+s \end{aligned}$$

Парамадисвара, въ своихъ комментаріяхъ, поясняя это дѣйствіе на численномъ примѣрѣ, замѣчаетъ, что такъ какъ:

$$\frac{m+p+q+s}{3} = a+b+c+d$$

то необходимо слѣдуетъ:

$$\frac{m+p+q+s}{3}-m=d \quad , \quad \frac{m+p+q+s}{3}-p=a, \ldots\ldots$$

Весьма вѣроятно, что послѣднія выраженія были также извѣстны Аріабгаттѣ *).

Въ 30-мъ правилѣ показано рѣшеніе уравненій 1-й степени съ однимъ неизвѣстнымъ. Вопросъ формулированный въ этомъ правилѣ заключается въ слѣдующемъ: два лица (*purushau*) имѣютъ „равные капиталы“ (*arthakrtam tulyam*) **); капиталы эти, каждый, состоятъ изъ извѣстнаго количества какихъ нибудь предметовъ (*gulikâ*) ***) и извѣстнаго количества денегъ (*rupakâs*) ****). Число предметовъ, сумма денегъ у каждаго изъ лицъ различны. Означая чрезъ a и b число предметовъ, m и p количество рупій, можно составить уравненіе:

$$mx+a=px+b$$

откуда:

$$x=\frac{b-a}{m-p}$$

Послѣднее выраженіе формулировано въ 30-мъ правилѣ Аріабгаттой.

Относительно знаковъ при числахъ m, p, a, и b Аріабгатта не дѣлаетъ никакого замѣчанія, изъ чего можно заключить, что онъ, подобно

---

*) Канторъ находитъ, что пріемъ, предложенный Аріабгаттой, представляетъ сходство съ методомъ *Тимарида*, названнымъ Ямвлихомъ *эпантемой*, о которомъ мы уже говорили въ отдѣлѣ „Греки“, на стр. 135.

Въ переводѣ на нашъ нынѣшній алгебраическій языкъ эпантема выразится формулой:

$$x_1+x_2+x_3+x_4+\ldots+x_n=A$$

$$x_1+x_2=b \qquad x_1+x_3=b' \qquad x_1+x_4=b'' \qquad x_1+x_n=b^{(i)}$$

откуда всегда будемъ имѣть:

$$x=\frac{b+b'+b''+\ldots+b^{(i)}-A}{n-2}$$

Напомнимъ здѣсь, что *эпантема*, по мнѣнію Нессельмана, есть самый древній примѣръ алгебраическихъ разсужденій древнихъ грековъ (см. *Nesselmann*, Die Algebra der Griechen, T. I. p. 233).

**) Терминъ *tulya* Аріабгатта употребляетъ въ смыслѣ *равенства* обѣихъ частей уравненія. Слово это происходитъ отъ слова *tula—вѣсы*. Терминомъ этимъ индусскіе математики, по мнѣнію Роде, хотѣли выразить условіе, что обѣ части уравненія должны быть *однородны*.

***) Слово *gulikâ* въ дословномъ переводѣ значитъ „маленькій шарикъ“. Роде употребляетъ его въ смыслѣ „предмета“. Употребленіе этого слово Аріабгаттой указываетъ, что въ его время не былъ еще извѣстенъ терминъ *yavat-tavat* для обозначенія неизвѣстной величины.

****) Слово *rupakâs* собственно означаетъ монеты съ изображеніями.

своимъ послѣдователямъ, при составленіи правилъ не обращалъ вниманія на знаки. Значеніе знаковъ при числахъ было вѣроятно извѣстно, такъ какъ въ логистикѣ *) индусовъ особенное значеніе имѣли „шесть дѣйствій“ (*shad-vidham*), которыя они прилагали также къ отрицательнымъ количествамъ (*rnam*).

Формула, данная Аріабгаттой, для рѣшенія уравненія первой степени, съ однимъ неизвѣстнымъ, замѣчательна какъ по своей точности, такъ еще тѣмъ, что она есть самый общій видъ рѣшенія подобныхъ уравненій.

Въ 31-мъ правилѣ дано *самое общее* рѣшеніе извѣстной задачи „о курьерахъ“. На сколько можно понимать Аріабгатта занимается этимъ вопросомъ въ примѣненіи къ двумъ планетамъ. Подобное предположеніе весьма вѣроятно, такъ какъ сочиненіе Аріабгатты есть собственно астрономическій трактатъ **). Термины „обратное движеніе“ (*viloma*) и „движеніе въ томъ же направленіи“ (*anuloma*), употребленные въ упомянутомъ правилѣ, прилагались индусскими астрономами для выраженія движенія свѣтилъ, проложенныхъ на сферу небесную. Правило, формулированное Аріабгаттой, даетъ право предполагать, что ему была извѣстна формула:

$$\frac{x}{v}=\frac{d}{v\pm v'}$$

при чемъ онъ имѣлъ вполнѣ ясное понятіе о двойномъ знакѣ знаменателя ***), или окончательнаго результата, въ зависимости отъ относительныхъ скоростей движенія, такъ какъ онъ говоритъ: „моментъ встрѣчи въ прошедшемъ или будущемъ“ (*atîta—êshya*).

Въ послѣднихъ двухъ правилахъ 32-мъ и 33-мъ формулировано рѣшеніе вопроса, который въ настоящее время носитъ въ элементарной Алгебрѣ названіе „неопредѣленнаго анализа первой степени“, и который со-

---

*) Подъ именемъ *логистика* греческіе математики понимали практическую Ариометику (см. стр. 126—127).

**) Аріабгаттѣ было извѣстно суточное вращеніе земли, которымъ онъ объяснялъ видимое движеніе звѣздъ на сферѣ небесной. Явленіе это по его словамъ представляетъ сходство „съ человѣкомъ ѣдущимъ въ лодкѣ, которому кажется, что предметы на берегу находящіеся удаляются отъ него въ противномъ направленіи“. Школа въ Ujjayinî не раздѣляла мнѣнія о суточномъ обращеніи земли.

***) Разстояніе x, которое проѣзжаютъ курьеры до мѣста встрѣчи, дается формулой $x=\frac{vd}{v\pm v'}$, въ которой d выражаетъ разстояніе между курьерами, а v и v' скорости съ которыми они ѣдутъ. Знакъ $+$ въ знаменателѣ относиться къ случаю когда курьеры ѣдутъ на встрѣчу одинъ другому, знакъ — къ случаю когда они ѣдутъ по одному и тому же направленію, при чемъ одинъ нагоняетъ другаго. Въ послѣднемъ случаѣ, если v' скорость, съ

стоитъ въ томъ, чтобы найти цѣлыя значенія для x и y, удовлетворяющія неопредѣленному уравненію:

$$ax+by=c$$

Рѣшеніе вопросовъ, относящихся къ неопредѣленному анализу было любимымъ занятіемъ индусскихъ математиковъ. Брамагупта и Баскара посвятили ему отдѣльныя главы въ своихъ сочиненіяхъ. Пріемъ примѣненный Брамагуптой былъ названъ имъ *кутука* или *кутака* (*kuttaka*—разсѣевать, размельчать). Аріабгатта, какъ видно, былъ весьма основательно знакомъ съ рѣшеніемъ подобнаго рода вопросовъ, при чемъ даетъ рѣшеніе для гораздо болѣе общаго случая. Брамагупта и Баскара ограничиваются простымъ случаемъ уравненія:

$$ax+by=c$$

Аріабгатта же указываетъ методъ рѣшенія въ цѣлыхъ числахъ двухъ совмѣстныхъ уравненій вида:

$$ax+by=c \quad \text{и} \quad ex+fz=g$$

Парамадисвара, въ своихъ комментаріяхъ, поясняетъ это на численномъ примѣрѣ:

$$8x+29y=4 \quad \text{и} \quad 17x+45z=7$$

при чемъ требуется, чтобы для одного и того же цѣлаго значенія x, значенія:

$$y=\frac{ax-c}{b} \quad \text{и} \quad z=\frac{cx-g}{f}$$

выражались въ цѣлыхъ числахъ.

Роде въ своихъ комментаріяхъ на вторую часть „Аріабгаттіама" подробно излагаетъ пріемъ, употребленный Аріабгаттой для рѣшенія неопредѣленныхъ уравненій 1-й степени. Изъ численнаго примѣра даннаго Парамадисварой видно, что методъ *разсѣеванія* заключался въ нахожденіи для x двухъ значеній α и β, изъ коихъ каждое отдѣльно удовлетворяло-бы даннымъ уравненіямъ; значенія эти Аріабгатта называетъ „временными значеніями" *(agra)*. Всякое значеніе x, которое дѣлаетъ y цѣлымъ будетъ формы $\alpha+bt$; всякое же значеніе, которое дѣлаетъ z цѣлымъ будетъ формы $\beta+fu$; одно только значеніе будетъ удовлетворять обѣимъ уравненіямъ заразъ и будетъ дано соотношеніемъ:

$$a+bt=\beta+fu$$

которою ѣдетъ курьеръ болѣе удаленный отъ наблюдателя и при томъ $v'>v$, то значеніе x получится отрицательное и знакъ — показываетъ, что x должно быть отсчитано въ противномъ направленіи, т. е. что встрѣча имѣла уже мѣсто.

или, при $\alpha>\beta$:

$$u=\frac{bt+(\alpha-\beta)}{f}$$

которое должно удовлетвориться цѣлыми значеніями u и t.

На этой формулѣ Аріабгатта излагаетъ свой методъ; онъ даетъ также способъ найти „временныя значенія" α и β. Аріабгатта говоритъ: „нужно дѣлить знаменатель b, соотвѣтствующій большему изъ временныхъ значеній α, на знаменатель f, соотвѣтствующій меньшему изъ временныхъ значеній β; затѣмъ нужно дѣлить остатки одинъ на другой". Парамадисвара объясняетъ это на приведенномъ уже численномъ примѣрѣ, въ которомъ $\alpha=15$, $\beta=11$, $b=29$ и $f=45$; при этомъ $u=\frac{29t+4}{45}$. Не входя въ дальнѣйшія подробности метода *разсѣеванія*, замѣтимъ только, что въ основаніи его лежитъ теорія непрерывныхъ дробей *).

Изъ этого бѣглаго очерка второй части сочиненія Аріабгатты видно, сколько оно заключаетъ интереснаго и важнаго. Сочиненіе это, безъ сомнѣнія, оказало не малую пользу дальнѣйшему развитію математическихъ наукъ у индусовъ. Объяснить и комментировать сочиненіе Аріабгатты было дѣломъ весьма труднымъ, такъ какъ правила, данныя авторомъ, облечены въ форму самыхъ лаконическихъ и малопонятныхъ стиховъ. Текстъ второй части состоитъ всего изъ 33 строфъ!

Весьма желательно, чтобы былъ переведенъ весь текстъ „Аріабгаттіама", а также комментаріи на него, сдѣланные Парамадисварой. Роде обѣщаетъ дать переводъ текста, изданнаго Керномъ **).

Брамагупта. Брамагупта родился въ 598 г. по Р. Х. и написалъ около 628 г. сочиненіе астрономическаго содержанія, заглавіе котораго *„Брама-Спута-Сидганта"*, т. е. *„Улучшенная система Брамы (Brâhma-sphuta-siddhânta)*. Сочиненіе это состоитъ изъ двадцати книгъ, изъ которыхъ XII-я посвящена Ариѳметикѣ (*Ganitad'hyaya*), а XVIII-я Алгебрѣ (*Cuttacad'hyaya*). Изложимъ вкратцѣ содержаніе поименованныхъ частей. Начнемъ съ Ариѳметики.

---

*) На это указываетъ также Роде въ своей статьѣ: *L. Rodet*, Sur la véritable signification de la notation numérique inventée par Âryabhata. Journal Asiatique. VII série. T. XVI. № 3. 1880.

**) Въ недавнее время профессоръ Лейденскаго университета *Кернъ* издалъ текстъ сочиненія Аріабгатты, подъ заглавіемъ: The Aryabhatîay, with commentary Bhatadîpikâ of Paramâdiçvara, edited by Dr. *H. Kern.* Leiden. 1874. in-4. Вторая глава этого сочиненія была переведена на французскій языкъ и комментирована *Роде* и напечатана подъ заглавіемъ: Leçons de Calcul d'Âryabhata, par *Leon Rodet.* Переводъ этотъ помѣщенъ въ Journal Asiatique, Mai-Juin, 1879, Paris, in-8.

Ариѳметика состоитъ изъ десяти главъ. По мнѣнію Брамагупты вычислителемъ называется всякій основательно знакомый со всѣми 20-ю дѣйствіями и 8-ю опредѣленіями. Подъ именемъ *дѣйствій* онъ понимаетъ: 1) сложеніе, 2) вычитаніе, 3) умноженіе, 4) дѣленіе, 5) возвышеніе въ квадратъ, 6) извлеченіе квадратнаго корня, 7) возвышеніе въ кубъ, 8) извлеченіе кубическаго корня, 9)—14) шесть дѣйствій надъ дробными числами, 15)—19) правила трехъ, пяти, семи, девяти и одиннадцати членовъ, т. е. простое тройное правило и сложное тройное правило; и 20) правило мѣны. Къ числу *опредѣленій* Брамагупта относитъ: 1) опредѣленіе смѣсей, вычисленіе процентовъ и опредѣленіе пробы, 2) прогрессіи, 3) плоскую Геометрію, 4)—7) вычисленіе объемовъ при различныхъ практическихъ приложеніяхъ и 8) измѣреніе при посредствѣ тѣни.

Въ I-й главѣ Ариѳметики изложены всѣ 20 дѣйствій, которыя сведены къ 12 общимъ правиламъ, выраженнымъ въ самой сжатой формѣ. Болѣе обстоятельно онѣ разобраны уже впослѣдствіи комментаторомъ Шатурведой, который пояснилъ ихъ примѣрами.

Глава II есть дополненіе первой, въ ней изложена шестидесятичная система счисленія; въ концѣ главы Брамагупта замѣчаетъ, что этимъ вопросомъ онъ займется впослѣдствіи подробнѣе при вычисленіи синусовъ. Въ своихъ комментаріяхъ Шатурведа говоритъ, что онъ поясняетъ только немногія части, такъ какъ въ противномъ случаѣ не хватило-бы нѣсколько сотъ томовъ для каждой главы.

Глава III содержитъ вычисленіе ариѳметическихъ строкъ. Далѣе показано нахожденіе суммы треугольныхъ чиселъ, а также квадратныхъ и кубическихъ.

Глава IV посвящена плоской Геометріи, которая составляетъ отдѣлъ Ариѳметики.

Геометрія у индусскихъ математиковъ носитъ совершенно иной характеръ, чѣмъ у греческихъ геометровъ. Строго-научной геометрической системы не существовало, объ аксіомахъ и доказательствѣ теоремъ нѣтъ и помину, такъ какъ индусскіе математики стремились только отыскать численныя соотношенія между различными частями данной фигуры, ни сколько не заботясь и не обращая вниманія на ея свойства. Основное начало, которымъ индусскіе математики руководствовались при выводѣ геометрическихъ истинъ и предложеній это принципъ *наглядности*; о справедливости предложеній они заключали прямо изъ чертежа, оно являлось у нихъ какъ логическое слѣдствіе построеній. Вмѣсто всякихъ разсужденій и доказательствъ индусскіе математики ограничивались тѣмъ, что чертили чертежъ, соотвѣтствующій извѣстному предложенію, дѣлали соотвѣтствующее построеніе и рядомъ

писали слово „смотри",—это считалось вполнѣ достаточнымъ. При выводѣ нѣкоторыхъ предложеній примѣняются методы: *конгруенціи* (тождества), *симметріи* и *подобія*. Впослѣдствіи, когда мы будемъ говорить о трудахъ Баскары, мы приведемъ нѣсколько геометрическихъ примѣровъ, заимствованные изъ сочиненій послѣдняго ученаго. На особенности геометрическаго метода индусовъ мы уже указали въ началѣ настоящаго сочиненія (см. стр. 10—19). Изъ геометрическихъ фигуръ Брамагупта разсматриваетъ только треугольникъ, четыреугольникъ и кругъ. Предложенія разсмотрѣнныя имъ относятся только къ нахожденію площадей и вычисленію нѣкоторыхъ частей этихъ фигуръ. Теоремъ же относящихся къ какимъ либо свойствамъ этихъ фигуръ нѣтъ. Особенное вниманіе Брамагупта обратилъ на вычисленіе различныхъ частей четыреугольниковъ, вписанныхъ въ кругъ; о другихъ четыреугольникахъ онъ не упоминаетъ. Въ виду этого и на основаніи различныхъ соображеній извѣстный Шаль*) высказалъ предположеніе, что вся геометрическая часть сочиненія Брамагупты имѣетъ своимъ назначеніемъ рѣшеніе слѣдующихъ четырехъ вопросовъ, относящихся къ треугольнику и четыреугольнику:

a) Найти въ функціи сторонъ треугольника, его площадь и радіусъ круга, описаннаго около него**).

---

*) Геометріей индусовъ занимался извѣстный Шаль, который одинъ изъ первыхъ обратилъ особенное вниманіе на труды Кольбрука, Страхея и Тайлора. Одну изъ главъ своего сочиненія „Aperçu historique" онъ посвятилъ этому вопросу.

Во всѣхъ извѣстныхъ намъ исторіяхъ математическихъ наукъ говориться весьма мало о развитіи и состояніи математическихъ познаній индусовъ. Арнетъ былъ первый обратившій вниманіе на этотъ вопросъ и посвятившій ему одну изъ главъ своего сочиненія: „*Arneth*, Die Geschichte der reinen Mathematik in ihrer Beziehung zur Geschichte der Entwickelung des menschlichen Geistes. Stuttgart, 1852. in-8". Къ сожалѣнію на это сочиненіе было обращено мало вниманія и оно почти неизвѣстно. Въ послѣднее время математикой индусовъ занимался Ганкель въ одной изъ главъ своего сочиненія: „*Hankel*, Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter. Leipzig. 1874. in-8". Многое Ганкель заимствовалъ изъ сочиненія Арнета. Наконецъ, въ вышедшемъ недавно первомъ томѣ сочиненія Кантора „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik", также весьма обстоятельно изложено все болѣе извѣстное до настоящаго времени объ познаніяхъ индусовъ въ математическихъ наукахъ.

**) Выраженіе для площади треугольника было также извѣстно арабскимъ геометрамъ, отъ которыхъ оно вѣроятно перешло на Западъ. Выраженіе это встрѣчается въ сочиненіяхъ: Савосарда, Фибоначчи, Іордана Немораріуса, Лукаса-де-Борго, Тарталіи, Кардана, Рамуса и мн. др. Весьма интересно, что справедливость этого предложенія индусскіе геометры обнаружили для треугольника, коего стороны 13, 14 и 15. Эти числа встрѣчаются также въ сочиненіи Герона Старшаго, а также у арабскихъ геометровъ. Ганкель высказалъ мнѣніе,

b) Построить треугольникъ, въ которомъ эта площадь и этотъ радіусъ были-бы выражены въ раціональныхъ числахъ. При этомъ предполагается, что и стороны выражены также въ раціональныхъ числахъ.

c) Найти площадь четыреугольника, вписаннаго въ кругъ, въ функціи его сторонъ, а также его діагонали, перпендикуляры, опущенные изъ его вершинъ, отрѣзки, которые они дѣлаютъ между собою пересѣкаясь и діаметръ круга.

d) Построить четыреугольникъ, вписанный въ кругъ, коего-бы площадь, діагонали, перпендикуляры и другія различныя прямыя линіи, равно какъ и діаметръ круга, были-бы выражены въ раціональныхъ числахъ.

Таково содержаніе геометрической части сочиненія Брамагупты, которое, какъ мы уже упоминали выше, многіе долгое время принимали за Элементы Геометріи, въ родѣ „Началъ" Евклида *). Особенное вниманіе было обращено математиками на выраженіе площади четыреугольника въ функціи его сторонъ, находящееся въ сочиненіи Брамагупты**). Вопросъ этотъ, какъ извѣстно, занималъ многихъ математиковъ XVI, XVII и XVIII столѣтій ***). Для отноше-

---

что индусами сначала было найдено выраженіе для высоты треугольника въ функціи сторонъ, т. е. формула:

$$h=\frac{\sqrt{(2ac)^2-(a^2+c^2-b^2)^2}}{2c}$$

а затѣмъ уже рядомъ алгебраическихъ преобразованій они нашли выраженіе площади въ функціи сторонъ, т. е. формулу:

$$\Delta=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

гдѣ

$$2p=a+b+c.$$

*) Были-ли извѣстны индусскимъ ученымъ „Начала" Евклида неизвѣстно, такъ какъ по этому вопросу нѣтъ никакихъ указаній. Съ большой вѣроятностью можно предположить, что они съ этимъ сочиненіемъ не были знакомы, такъ какъ нѣтъ ничего въ сочиненіяхъ Аріабгатты, Брамагупты и Баскары напоминающаго пріемы Евклида. „Начала" Евклида стали извѣстны индусамъ въ началѣ XVIII в., благодаря переводу сдѣланному по повелѣнію раджи Яя-Синги. Арабскіе переводы „Началъ" существовали въ Индостанѣ, но когда они были привезены туда неизвѣстно. При взятіи англичанами Серингапатнама въ 1799 г. въ библіотекѣ Типо-Саиба были найдены арабскіе переводы „Началъ" Евклида и нѣкоторыхъ сочиненій Аристотеля.

**) *Вейсенборнъ* занимался сравненіемъ различныхъ предложеній, относящихся къ трапеціи, встрѣчающихся въ сочиненіяхъ Евклида, Герона Старшаго и Брамагупты. См. *Weissenborn*, Das Trapez bei Euklid, Heron und Brahmegupta. Статья эта помѣщена въ „Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik, II—Heft, Leipzig. 1879".

***) Выраженіе для площади вписаннаго въ кругъ четыреугольника въ функціи сторонъ четыреугольника занимало умы многихъ ученыхъ, изъ числа ихъ упомянемъ: Бенедиктиса, Скалигера, Преторіуса, Віета. Скалигеръ далъ невѣрное рѣшеніе. Вопросъ этотъ также предлагалъ для рѣшенія Регіомонтанусъ, при этомъ требовалось опредѣлить еще діаметръ

нія окружности къ діаметру Брамагупта даетъ выраженіе $\pi=\sqrt{10}$. Всего въ этой главѣ разсмотрѣно 23 вопроса. Въ заключеніе необходимо замѣтить, что самъ Брамагупта нигдѣ не говоритъ, что имъ взяты четыреугольники, вписанные въ кругъ.

Въ главахъ V—X Брамагупта занимается вычисленіемъ объемовъ и вмѣстимости нѣкоторыхъ тѣлъ. Главы эти не представляютъ ничего особеннаго.

Перейдемъ къ Алгебрѣ. Алгебра Брамагупты состоитъ изъ 8 главъ.

Въ I-й главѣ показано рѣшеніе неопредѣленнаго уравненія первой степени, вида:

$$ax+by=c$$

въ цѣлыхъ числахъ. На рѣшеніе подобныхъ уравненій индусскіе математики обратили особенное вниманіе. Пріемъ, предложенный Брамагуптой для рѣшенія подобныхъ уравненій былъ уже извѣстенъ Аріабгаттѣ, но есть основаніе предполагать, что онъ былъ найденъ гораздо раньше. Мы уже выше замѣтили, что методъ данный Аріабгаттой для рѣшенія неопредѣленныхъ уравненій первой степени, былъ извѣстенъ между браминами подъ именемъ „способа разсѣеванія" и былъ основанъ на разложеніи дроби $\frac{a}{b}$ въ непрерывную дробь. Пріемъ этотъ впослѣдствіи былъ снова предложенъ Эйлеромъ.

Во II-й главѣ подробно изложены дѣйствія надъ различными величинами, дѣйствія надъ корнями и ирраціональными числами, а также правила дѣйствій надъ неизвѣстными величинами.

Въ III-й главѣ изложено рѣшеніе уравненій первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ.

круга, въ который вписанъ четыреугольникъ. Самыя полныя рѣшенія вопроса о построеніи четыреугольника вписаннаго въ кругъ по четыремъ даннымъ сторонамъ даны Брамагуптой и Преторіусомъ, которые одни ввели условіе, что стороны выражены въ раціональныхъ числахъ. Въ настоящее время выраженіе это входитъ въ предѣлы элементарныхъ учебниковъ Геометріи, гдѣ оно встрѣчается въ формѣ:

$$S=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+d-c)(a+b+c-d)(a+c+d-b)(c+b+d-a)}.$$

Выраженіе для площади треугольника въ функціи сторонъ есть частный случай только что написаннаго, для этого стоитъ только одну изъ сторонъ четыреугольника принять равной нулю. Такое положеніе было введено еще *Шатурведой*, однимъ изъ комментаторовъ Брамагупты, который говоритъ: „что для случая треугольника нужно вычесть послѣдовательно три стороны изъ четырехъ написанныхъ полусуммъ, и что четвертая остается безъ измѣненія". Нѣкоторыя изъ примѣчаній Шатурведы указываютъ, что имъ не всегда было понято сказанное Брамагуптой.

Въ IV-й главѣ—рѣшеніе уравненій второй степени.

Въ V-й главѣ изложено рѣшеніе уравненій съ нѣсколькими неизвѣстными. Большая часть изъ этихъ уравненій принадлежатъ къ числу неопредѣленныхъ и при ихъ рѣшеніи примѣняются правила, изложенныя въ первой главѣ. Многіе изъ примѣровъ этой главы заимствованы изъ астрономіи.

Въ VI-й главѣ показано рѣшеніе неопредѣленныхъ уравненій вида:

$$xy+ax+by=c$$

Въ VII-й главѣ показано, какъ рѣшаются уравненія вида:

$$ax^2+b=y^2$$

главнымъ образомъ въ цѣлыхъ числахъ.

Въ VIII-й главѣ изложены правила и задачи, имѣющія приложеніе въ астрономическихъ вычисленіяхъ.

Въ концѣ своего сочиненія Брамагупта говоритъ: „Предложенія, изложенныя въ настоящемъ сочиненіи, даны только ради удовольствія. Мудрецъ можетъ найти тысячи подобныхъ примѣровъ, или же на основаніи указанныхъ правилъ рѣшать примѣры, предложенные другими. Подобно тому, какъ солнце своимъ блескомъ затмѣваетъ звѣзды, точно также и свѣдущій можетъ затмить другихъ астрономовъ въ собраніи народа, если онъ станетъ предлагать алгебраическія задачи для рѣшеній, а тѣмъ болѣе если самъ будетъ ихъ рѣшать“.

Изъ этого бѣглаго обзора содержанія сочиненія Брамагупты видно, что его нельзя назвать руководствомъ, но тѣмъ не менѣе нѣкоторые вопросы изложены въ немъ вполнѣ систематически и составляютъ какъ-бы вполнѣ опредѣленный кругъ изслѣдованій. Большая часть вопросовъ, изложенныхъ въ этомъ сочиненіи, относятся къ астрономіи, но многіе также неимѣютъ къ ней непосредственнаго отношенія. Не смотря на многіе недостатки этого сочиненія оно заслуживаетъ вниманія. Въ особенности много занимался Брамагупта неопредѣленными уравненіями.

Въ сочиненіи Брамагупты особеннаго вниманія заслуживаютъ его понятія объ отрицательныхъ величинахъ и о ихъ значеніи. Онъ выражается въ слѣдующихъ словахъ: „сумма двухъ *имуществъ* есть *имущество;* сумма двухъ *долговъ—долгъ;* сумма *имущества* и *долга* равна ихъ разности, если же они равны, то она есть нуль. Сумма нуля и *долга* есть долгъ; *имущества* и нуля—*имущество;* сумма двухъ нулей есть нуль“.

Далѣе, указывая правила, которымъ слѣдуетъ придерживаться при вычитаніи, Брамагупта продолжаетъ: „меньшее вычитается изъ большаго, *имущество* изъ *имущества*, *долгъ* изъ *долга;* но если вычитываютъ большее

изъ меньшаго, то избытокъ мѣняется (т. е. знакъ). *Долгъ* вычтенный изъ нуля дѣлается *имуществомъ*, а *имущество—долгомъ*. *Долгъ* безъ нуля остается *долгомъ*, а *имущество—имуществомъ*. Если требуется вычесть изъ *долга имущество* или изъ *имущества долгъ*, то необходимо взять ихъ сумму“.

Также весьма интересно опредѣленіе, которое даетъ Брамагупта величинѣ дѣленной на нуль. Онъ говоритъ: „*имущество* или *долгъ*, раздѣленный на нуль есть ***khacchêdam***, т. е. величина, имѣющая знаменателемъ нуль“.

Изъ вышеприведеннаго видно, что Брамагупта представлялъ себѣ отрицательныя величины, какъ величины положительныя, только отсчитываемыя въ другую сторону отъ нуля. Это достойно вниманія, такъ какъ подобный взглядъ на отрицательныя величины былъ установленъ европейскими математиками много времени спустя Брамагупты.

Баскара. Познакомившись съ сочиненіями Брамагупты перейдемъ къ разсмотрѣнію сочиненій другаго индусскаго математика Баскары *), жившаго отъ 1141 г. по 1225 г., который написалъ астрономическій трактатъ подъ заглавіемъ „*Сидгантаципромани*“ (*Siddhântaçiromani* т. е. вѣнецъ одной изъ астрономическихъ системъ) **). Къ этому сочиненію Баскара написалъ введеніе, состоящее изъ двухъ частей: первая заключаетъ Ариѳметику, заглавіе ея *Лилавати* (*Lîlâvatî*—красивая); вторая содержитъ Алгебру—*Віаганита* (*Bija-Ganita*—вычисленіе корней).

Сочиненія Баскары содержатъ почти тоже, что и сочиненія Брамагуп-

---

*) Баскару часто называютъ *Баскара-Ахарія*, но второе названіе не есть имя, а ученая степень, такъ какъ у индусовъ названіе *Âcârya* соотвѣтствовало ученой степени доктора философіи.

Баскара былъ родомъ и жилъ въ городѣ Биддурѣ въ Деканѣ.

**) Одна изъ главъ астрономическаго трактата Баскары занимается вопросомъ о шаровидности земли (*Gola Adya*), другая посвящена астрономическимъ вычисленіямъ (*Gannita Adya*).

Въ началѣ своего сочиненія Баскара дѣлаетъ слѣдующее интересное разсужденіе относительно неподвижности земли въ пространствѣ: „земной шаръ, состоящій изъ земли, воздуха, пространства и огня неподвиженъ въ пространствѣ, онъ окруженъ планетами и неподвиженъ, благодаря собственной силѣ. Подставокъ никакихъ нѣтъ. Если-бы земля нуждалась въ подпорѣ, то эта подпора необходимо также нуждалась въ другой подпорѣ и т. д. И въ концѣ концовъ все таки нужно вообразить себѣ нѣчто такое, которое держалось бы безъ подпоры. Почему же это нѣчто не можетъ быть земной шаръ, который есть одна изъ видимыхъ формъ божества?“ Далѣе Баскара продолжаетъ: „земля обладаетъ притягательной силой, которая притягиваетъ всѣ тѣла находящіяся въ воздухѣ и имѣющія вѣсъ. Вслѣдствіи этого тѣла эти какъ бы падаютъ. Куда могла-бы упасть земля, которая окружена пространствомъ?“.

ты, но они для насъ представляютъ особенный интересъ, такъ какъ въ нихъ пояснено многое сказанное послѣднимъ. Баскара обратилъ особенное вниманіе на точность выраженій и представленій, иногда видны даже попытки и стремленіе приводить нѣчто въ родѣ доказательствъ. Кромѣ того сочиненія Баскара доступнѣе, такъ какъ многое въ нихъ написано прозой, между тѣмъ какъ сочиненія Брамагупты всѣ написаны самыми вычурными стихами. Въ концѣ своего сочиненія Баскара указываетъ на цѣль своего труда и на его отношеніе къ попыткамъ подобнаго рода, сдѣланными до него; къ сожалѣнію способъ выражаться Баскары, для насъ до того непонятенъ, что нельзя себѣ составить никакого представленія въ чемъ именно состояли работы его предшественниковъ. Баскара выражается въ слѣдующихъ словахъ:

„Такъ какъ сочиненія по Алгебрѣ, написанныя Брамагуптой, Кридгарой и Падманабгой слишкомъ обширны, то я предпринялъ извлечь изъ нихъ все самое главное и составить хорошее руководство для всѣхъ, желающихъ изучить эту науку. Настоящая книга заключаетъ тысячу строкъ, въ которыхъ изложены правила и примѣры. Послѣдніе предназначены для поясненія правилъ, или же указываютъ на ихъ цѣль и приложенія, а также служатъ къ облегченію разбора отдѣльныхъ случаевъ и наконецъ иногда они поясняютъ основныя положенія. Число отдѣльныхъ случаевъ безконечно велико, а потому можно было привесть только немногіе. Съ одной стороны обширное море науки для людей съ слабымъ разсудкомъ трудно переплываемо, съ другой—исполненные талантовъ не нуждаются въ дальнѣйшемъ ученіи. Искра науки, достигнувъ понятливаго ума, разгорается благодаря своей собственной силѣ. Подобно каплѣ масла, распространяющейся по водѣ, подобно тайнѣ, повѣренной злому, подобно милостинямъ, поданнымъ достойному, какъ-бы она ни была мала, точно также распространяется наука въ развитомъ умѣ, благодаря своей собственной силѣ".

„Для людей съ свѣтлымъ умомъ легко понять, что Ариѳметика состоитъ изъ правила трехъ членовъ; Алгебра-же есть остроуміе, какъ я уже выше замѣтилъ въ главѣ о шарѣ. Правило трехъ членовъ составляетъ Ариѳметику, Алгебра же есть чистый разсудокъ. Что можетъ существовать неизвѣстнаго для понимающаго? а потому для однихъ только неразвитыхъ написано настоящее сочиненіе".

„Для умноженія своего знанія, для укрѣпленія увѣренности въ свою душевную силу, ты долженъ читать сочиненія различныхъ математиковъ, а потомъ снова читать эти основныя начала математики, прекрасныя по языку, легко понимаемыя большинствомъ, обнимающія всю суть счисленія; они заключаютъ объясненіе основныхъ предложеній, исполнены высоты и лишены ошибокъ".

Изъ приведенныхъ словъ Баскара видно, что до него существовало много математическихъ сочиненій. Онъ прямо указываетъ, что содержаніе своего труда онъ заимствовалъ изъ обширныхъ сочиненій по тому же предмету. Баскара былъ только собирателемъ, онъ помѣстилъ въ своемъ сочиненіи все то, что казалось ему необходимымъ, остальное онъ выбросилъ, какъ напримѣръ многіе изъ примѣровъ, приведенныхъ въ „Брама-Спутѣ-Сидгантѣ".

„Сидгантациромани" было, въ свою очередь, комментировано многими учеными, изъ числа которыхъ наиболѣе извѣстенъ *Ганеза (Ganesa)*, жившій около 1545 г. Но большая часть комментаторовъ новаго ничего не прибавила, правила и основныя положенія оставались безъ измѣненія *).

Мы сначала познакомимся съ содержаніемъ Ариѳметики, а затѣмъ уже Алгебры Баскары.

Лилавати состоитъ изъ тринадцати главъ **).

Въ I-й главѣ помѣщено введеніе, въ которомъ приведены таблицы мѣръ протяженій, вѣса и денегъ ***).

Во II-й главѣ изложены восемь ариѳметическихъ дѣйствій: сложеніе, вычитаніе, умноженіе, дѣленіе, возвышеніе въ квадратъ, извлеченіе квадратнаго корня, возвышеніе въ кубъ и извлеченіе кубическаго корня. Послѣ этого слѣдуютъ дѣйствія надъ дробями и наконецъ показаны дѣйствія при посредствѣ нуля. Въ одномъ изъ отдѣловъ этой главы Баскара указываетъ правила для приведенія дробей къ одному знаменателю. Производство дѣйствій мало чѣмъ разнится отъ употребляемыхъ въ настоящее время. Произведеніе изъ двухъ равныхъ множителей Баскара, подобно другимъ индусскимъ математикамъ, называетъ *varga*—квадратъ, произведеніе трехъ равныхъ множителей *ghana*—кубъ. Понятія о квадратѣ и кубѣ у индусскихъ математиковъ не сопровождаются, какъ у древнихъ греческихъ геометровъ, представленіями о площади и объемѣ; подобныя выраженія являлись у индусовъ прямо какъ произведенія. Имъ были извѣстны выраженія:

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

*) Въ настоящее время сочиненія Брамагупты и Баскары мало кому извѣстны изъ туземныхъ жителей Индостана. Въ Пунѣ (Poona), главномъ центрѣ браминской учености, едва-можно найти нѣсколько лицъ, которымъ извѣстны „Лилавати", „Віаганита" и др. сочиненія. Въ школахъ ограничиваются заучиваніемъ правилъ, изложенныхъ въ „Суріѣ-Сидгантѣ".

**) „Лилавати" была переведена въ 1587 г. на персидскій языкъ, по повѣленію шаха Акбера математикомъ *Физи* (Fyzi). „Віаганита" была также переведена на персидскій языкъ въ 1634 г. математикомъ *Рушидомъ* (Ata Allah Ruschidi ben Ahmed Nadir).

***) Сочиненіе свое Баскара начинаетъ съ того, что обращается къ божеству, голова котораго похожа на слоновую, и ноги котораго обожаемы богами.

которыя они примѣняли также при извлеченіи корней. Существовало также понятіе и о высшихъ степеняхъ. Четвертая степень называлась *varga-varga*, шестая—*ghana-varga* или *varga-ghana*, восьмая—*varga-varga-varga*, девятая—*ghana-ghana* и т. д. Пятая степень выражалась *varga-ghana-ghata*, седьмая—*varga-varga-ghana-ghata* и т. д. Безъ слова *ghata* показатели умножаются, при этомъ же словѣ они складываются. Говоря объ „Ариѳметикахъ“ Діофанта мы указали, что онъ степень всегда выражалъ только чрезъ сложеніе, индусы же употребляли сложеніе и умноженіе, смотря потому была-ли степень нечетная или четная. Пояснить это всего лучше на примѣрахъ.

Баскара писалъ:

$$a^4=(a^2)^2\ ,\ a^5=a^2.a^3\ ,\ a^6=(a^2)^3\ ,\ a^7=a^2.a^2.a^3,$$

Діофантъ же:

$$a^4=a^2.a^2\ ,\ a^5=a^2.a^3\ ,\ a^6=a^3.a^3\ ,\ a^7=a^2.a^2.a^3,\ldots.$$

Сложеніе индусы обозначали тѣмъ, что слагаемыя ставили рядомъ. При вычитаніи уменьшаемое ставится рядомъ съ вычитаемымъ, но надъ вторымъ ставится всегда точка. Умноженіе обозначали тѣмъ, что послѣ множителей ставили слово *bhavita*, т. е. *предшествующее*. Для обозначенія дѣленія ставили дѣлитель подъ дѣлимымъ, но черты не употребляли. Для обозначенія извлеченія квадратнаго корня изъ ирраціональнаго числа, передъ соотвѣтствующимъ числомъ ставили слогъ *ka*, начальный слова *karanî*, т. е. ирраціональное. Такъ напримѣръ дѣйствіе $\sqrt{272}-\sqrt{26}$ индусскіе математики писали ***ka*** 272 ***ka*** $\dot{2}6$.

Изъ сказаннаго видно, что почти всѣ дѣйствія индусскіе математики выражали символически словами, а не знаками. Символы свои они прилагали только къ одночленнымъ выраженіямъ, такъ какъ представленія, соотвѣтствующаго нашимъ скобкамъ еще въ то время несуществовало у индусовъ. При умноженіи на нуль произведеніе неуничтожается, если только снова слѣдуютъ дѣйствія съ нулемъ, такъ какъ индусскіе математики говорили, что такое произведеніе снова возстановляется. Дробь съ знаменателемъ равнымъ нулю Баскара считаетъ неопредѣленнымъ выраженіемъ, но одинъ изъ комментаторовъ замѣчаетъ, что истинное значеніе подобной дроби есть безконечность *).

Глава III состоитъ изъ шести отдѣловъ. Въ 1-мъ отдѣлѣ изложены

*) Въ одной изъ задачъ второй главы Баскара обращается съ слѣдующими словами къ самой Лилавати: „Скажи мнѣ дорогая и прекрасная Лилавати, ты у которой глаза подобны глазамъ молодаго оленя, какой получиться результатъ отъ умноженія 135 на 12? Подъ именемъ Лилавати полагаютъ Баскара разумѣетъ саму Ариѳметику.

правила, какъ производятся дѣйствія въ обратномъ порядкѣ. Правила эти Баскара прилагаетъ къ цѣлому ряду задачъ, изъ числа которыхъ мы укажемъ на слѣдующую: „найти число, которое дало-бы въ частномъ 2 послѣ производства надъ нимъ слѣдующихъ дѣйствій: сначала число умножено на 3, затѣмъ оно увеличено на $\frac{3}{4}$ этого произведенія, снова раздѣлено на 7 и уменьшено на $\frac{1}{7}$ частнаго, полученный остатокъ возвышенъ въ квадратъ, затѣмъ уменьшенъ на 52, изъ полученнаго числа извлеченъ квадратный корень, затѣмъ прибавлено 8 и наконецъ раздѣлено на 10“. Подобные вопросы въ настоящее время рѣшаются при помощи уравненій, Баскара же излагаетъ правила, при посредствѣ которыхъ всѣ дѣйствія нужно производить въ обратномъ порядкѣ, начиная съ послѣдняго и такимъ образомъ дойти до неизвѣстнаго числа. Во 2-мъ отдѣлѣ слѣдуетъ рядъ вопросовъ, который рѣшается при помощи метода, напоминающаго правило, извѣстное подъ именемъ *правила фальшиваго положенія (regula falsi).* Изъ числа этихъ вопросовъ укажемъ на слѣдующій: „изъ пучка цвѣтовъ чистыхъ лотосовъ взяты третяя, пятая и шестая части, которыя соотвѣтственно приподнесены богамъ: Шивѣ, Вишнѣ и Солнцу; четвертая же часть досталась Бавани. Оставшіеся шесть лотосовъ даны многоуважаемому учителю. Скажи мнѣ немедленно число всѣхъ цвѣтковъ?“ При рѣшеніи этой задачи Баскара поступаетъ слѣдующимъ образомъ: онъ выбираетъ сначала произвольное число, дѣлящееся безъ остатка на 3, 4, 5 и 6; пусть это число будетъ 60. Взятое число неудовлетворяетъ предложенной задачѣ, такъ какъ въ остаткѣ оно даетъ 3, а не 6. Изъ этого Баскара заключаетъ, что нужно взять число вдвое большее, т. е. 120, которое и удовлетворяетъ задачѣ. Въ 3-мъ отдѣлѣ показано какъ изъ извѣстнаго сочетанія величинъ могутъ быть найдены эти величины. Вопросъ этотъ рѣшаетъ Баскара при слѣдующихъ задачахъ: по данной суммѣ и разности двухъ чиселъ найти самыя числа; а также по данной разности квадратовъ и разности чиселъ найти самыя числа по формулѣ $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$. Въ 4-мъ отдѣлѣ даны правила, при помощи которыхъ можно отыскать два числа, коихъ сумма или же разность квадратовъ, уменьшенная на единицу, была-бы снова число квадратное. Баскара предлагаетъ три правила. По первому одно число $n=\frac{8m^2-1}{2m}$, а другое $\frac{n^2}{2}+1$, и мы всегда будемъ имѣть, что $n^2\pm\left(\frac{n^2}{2}+1\right)^2-1$ равно числу квадратному. По другому пріему оба числа будутъ $m+\frac{1}{2m}$ и 1, и наконецъ по третьему, они суть $8m^4+1$ и $8m^3$. Въ 5-мъ отдѣлѣ изложено рѣшеніе уравненій вида $x\pm a\sqrt{x}=b$ и $cx\pm a\sqrt{x}=b$, при чемъ послѣднее при-

водится къ виду $x \pm \frac{a}{c}\sqrt{x} = \frac{b}{c}$. Всѣ правила Баскара поясняетъ на примѣрахъ, состоящихъ изъ дѣйствій надъ извѣстными числами для полученія неизвѣстныхъ. Въ 6-мъ отдѣлѣ изложены тройныя правила и приложеніе ихъ къ различнымъ вопросамъ торговли.

Всѣ изложенныя розысканія Баскара производитъ почти тѣми-же самыми пріемами и методами, которые употребительны и въ настоящее время.

Глава IV состоитъ также изъ шести отдѣловъ; она озаглавлена „розысканія относящіяся къ смѣсямъ". Въ 1-мъ отдѣлѣ этой главы авторъ рѣшаетъ различные вопросы, относящіеся къ правиламъ процентовъ и товарищества. Во 2-мъ отдѣлѣ разбирается задача: „опредѣлить время нужное для наполненія бассейна водой, текущей въ него изъ нѣсколькихъ источниковъ, если извѣстны времена, въ которыя бассейнъ наполняется каждымъ изъ источниковъ отдѣльно". Въ 3-мъ отдѣлѣ, озаглавленномъ „покупка и продажа", рѣшено нѣсколько задачъ, относящихся къ вопросамъ практической жизни. Въ 4-мъ отдѣлѣ рѣшена слѣдующая задача и приведено правило для ея рѣшенія. Задача состоитъ въ слѣдующемъ: „изъ четырехъ ювелировъ имѣютъ, первый—8 рубиновъ, второй—10 сафировъ, третій—100 жемчужинъ и четвертый 5—алмазовъ; при встрѣчѣ каждый изъ нихъ отдаетъ остальнымъ тремъ по части своего имущества. Послѣ раздѣла части ихъ одинаковы; требуется опредѣлить стоимость имущества каждаго изъ ювелировъ". Для рѣшенія этой задачи Баскара предлагаетъ слѣдующее правило: изъ каждаго изъ чиселъ 8, 10, 100 и 5 нужно вычесть число лицъ—4; затѣмъ слѣдуетъ взять произвольное число, напр. 96, которое дѣлятъ на полученные остатки 4, 6, 96 и 1; полученныя частныя 29, 16, 1 и 96 будутъ отношенія различныхъ стоимостей имуществъ ювелировъ. Въ 5-мъ отдѣлѣ изложены задачи на правило смѣшенія, а также опредѣленіе пробы золота и серебра. Въ 6-мъ отдѣлѣ Баскара занимается вопросомъ о нахожденіи числа различныхъ соединеній, но при этомъ онъ замѣчаетъ, что онъ не будетъ распространятся надъ этимъ вопросомъ, чтобы не увеличить объема своей книги.

Глава V, состоящая изъ двухъ отдѣловъ, посвящена ариѳметическимъ и геометрическимъ строкамъ. Въ восьми правилахъ изложено какъ находить суммы рядовъ:

$$1+2+3+4+\ldots+n$$
$$1+3+6+\ldots+n(n+1)$$
$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$$

Далѣе авторъ переходитъ къ общему ряду:

$$a\ ,\ a+k\ ,\ a+2k\ ,\ \ldots\ ,\ a+(n-1)k$$

и показываетъ какъ находить его сумму. Во 2-мъ отдѣлѣ показаны правила для суммированія геометрическихъ строкъ.

Глава VI содержитъ плоскую Геометрію, изложеніе которой мало отличается отъ находящагося въ сочиненіи Брамагупты, сдѣланы только незначительныя дополненія. Объ этой главѣ мы уже имѣли возможность говорить выше, въ началѣ настоящаго сочиненія. Въ началѣ этой главы Баскара, подобно Брамагуптѣ, занимается прямоугольными треугольниками, при чемъ пиѳагорова теорема приведена какъ вполнѣ очевидное предложеніе (см. стр. 11). Затѣмъ приведено нѣсколько примѣровъ, въ которыхъ показано, какъ по двумъ даннымъ сторонамъ прямоугольнаго треугольника отыскивается третяя сторона; при этомъ числа такъ подобраны, что результатъ всегда получается число раціональное. Если катеты равны, то гипотенуза ирраціональна; при этомъ Баскара показываетъ какъ отыскивается корень числа въ этомъ случаѣ. Правило предложенное Баскарой состоитъ въ слѣдующемъ: если требуется извлечь корень изъ $\frac{169}{8}$, то умножаютъ числитель на произведеніе изъ 8 и четной степени 10, напр. 10000; полученное произведеніе есть 13520000, приближенный корень этого выраженія 3677, а потому $\sqrt{\frac{169}{8}} = \frac{3677}{800} = 4\frac{477}{800}$. Подобный пріемъ употребляется и въ настоящее время для извлеченія корней изъ чиселъ по приближенію. Затѣмъ слѣдуютъ предложенія и правила, относящіеся къ составленію прямоугольныхъ треугольниковъ, коихъ стороны выражаются раціональными числами. Изъ числа подобныхъ предложеній укажемъ на слѣдующія:

$$2ab+(a-b)^2=a^2+b^2 \quad \text{и} \quad (a-b)(a+b)=a^2+b^2.$$

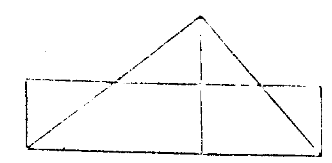
Далѣе слѣдуетъ цѣлый рядъ правилъ, изложенныхъ въ очень наглядной формѣ и поясненныхъ примѣрами, относящихся къ вычисленію прямоугольныхъ треугольниковъ, когда извѣстны сумма или разность гипотенузы и одного изъ катетовъ и другой катетъ, или-же подобное соотношеніе между катетами и гипотенузой. Изъ числа такихъ примѣровъ укажемъ на слѣдующій: „Бамбуковая трость 32-хъ футовъ вышины переломлена вѣтромъ; вершина трости касается поверхности земли на разстояніи 16 футовъ отъ основанія. Скажи мнѣ математикъ, на какомъ разстояніи отъ основанія переломалась трость?" По правилу части трости равны: одна $\frac{1}{2}\left(32+\frac{16^2}{32}\right)$, а другая $\frac{1}{2}\left(32-\frac{16^2}{32}\right)$, или же 20 и 12. Приведенная задача извѣстна въ математикѣ подъ именемъ „задачи о бамбуковой трости". Другая изъ задачъ рѣшенныхъ Баскарой состоитъ въ слѣдующемъ: „Въ одномъ озерѣ росъ цвѣтокъ лотоса и возвышался на полъ фута надъ водой; вѣтромъ его

отнесло въ сторону и онъ скрылся подъ водой на разстояніи двухъ футовъ отъ своего первоначальнаго мѣста. Вычисли скоро математикъ глубину воды?“ Подобныя задачи были извѣстны еще Брамагуптѣ.

Затѣмъ слѣдуетъ рѣшеніе такой задачи: „Двѣ бамбуковыя трости, стоящія перпендикулярно къ поверхности земли, находятся на нѣкоторомъ разстояніи одна отъ другой. Вообразивъ себѣ линіи, проведенныя изъ вершинъ къ противолежащимъ основаніямъ, требуется опредѣлить отрѣзки, на которыя разсѣкается прямая, соединяющая основанія, перпендикуляромъ, опущеннымъ изъ точки пересѣченія проведенныхъ прямыхъ на линію соединяющую основанія, а также опредѣлить и величину самаго перпендикуляра?“. Если m и n высоты тростей, а a разстояніе между ихъ основаніями, то величина перпендикуляра будетъ $\frac{m \cdot n}{m+n}$, а величина отрѣзка при m равна $\frac{am}{m+n}$, а при n равна $\frac{an}{m+n}$. Для нахожденія этихъ выраженій нужно прежде всего выразить отрѣзки чрезъ высоту, а потомъ сложить полученныя выраженія. Подобное правило было уже указано Брамагуптой при опредѣленіи высоты треугольника, образованнаго отъ пересѣченія двухъ противолежащихъ сторонъ четыреугольника.

Мы уже выше сказали, что Баскара во многихъ мѣстахъ своего сочиненія старается быть точнѣе Брамагупты, онъ начинаетъ вводить уже кое какія положенія, такъ напримѣръ онъ говоритъ, что сумма двухъ сторонъ треугольника болѣе третьей. Затѣмъ Баскара находитъ выраженіе для площади треугольника, которую онъ полагаетъ равной половинѣ произведенія основанія на высоту. Пріемъ тотъ же, что и примѣненный Брамагуптой. Одинъ изъ комментаторовъ Баскары, Ганеза, даетъ слѣдующее доказательство при нахожденіи площади треугольника: на основаніи треугольника онъ строитъ прямоугольникъ (фиг. 4), котораго высота равна половинѣ высоты

Фиг. 4.



треугольника. Такое построеніе дѣйствительно приводитъ къ цѣли если только доказать равенство площадей маленькихъ треугольниковъ, отсѣченныхъ отъ прямоугольника, съ двумя маленькими треугольниками, отсѣченными отъ большаго треугольника верхнимъ основаніемъ прямоугольника. Но

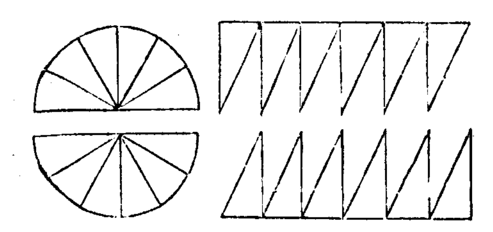
доказывать равенство этихъ треугольниковъ индусскіе математики считали излишнимъ. Они полагали, что это вполнѣ очевидно изъ чертежа, а потому вполнѣ достаточно. Ганеза ограничивается тѣмъ, что рядомъ съ чертежемъ, соотвѣтствующимъ этому построенію, пишетъ слово „смотри“.

Отъ треугольниковъ Баскара переходитъ къ четыреугольникамъ, при чемъ онъ замѣчаетъ, что для опредѣленія четыреугольника недостаточно четырехъ сторонъ, но необходима еще діагональ; изъ этого можно заключить, что Баскара имѣлъ въ виду не только вписанные въ кругъ четыреугольники, но вообще всякіе четыреугольники. Относительно выраженій для площадей треугольника и четыреугольника въ функціи сторонъ Баскара замѣчаетъ, что древніе математики неправильно примѣняли ихъ ко всякимъ четыреугольникамъ и что онѣ только приближенны. Справедливость этихъ выраженій для четыреугольниковъ, вписанныхъ въ кругъ, также повидимому неизвѣстна Баскарѣ. При вычисленіи различныхъ частей четыреугольниковъ Баскара не ограничивается раціональными числами, онъ беретъ также и ирраціональныя, изъ чего можно заключить, что онъ стремился обобщить нѣкоторыя изъ предложеній, данныхъ Брамагуптой. Дѣлая такія обобщенія Баскара часто впадаетъ въ ошибки, что подало поводъ многимъ изъ новѣйшихъ математиковъ раздѣлять мнѣніе о томъ, что Баскара многія изъ предложеній, данныхъ Брамагуптой, не понялъ. Также заслуживаетъ вниманія въ этой главѣ правило данное Баскарой для нахожденія площади четыреугольника, разложеніемъ четыреугольника на два треугольника. Пріемъ этотъ вполнѣ принадлежитъ Баскарѣ.

Далѣе Баскара занимается нахожденіемъ площади и окружности круга. Для отношенія окружности къ діаметру онъ даетъ сначала точное выраженіе $\frac{3927}{1250}$, а затѣмъ приближенное въ видѣ $\frac{22}{7}$. Примѣняя первое выраженіе для π, длина окружности выразится чрезъ $2\,\frac{3927}{1250}\,r$, а примѣняя второе— $2\frac{22}{7}r$. Одинъ изъ комментаторовъ, Ганеза, въ своихъ толкованіяхъ указываетъ, какъ было найдено выраженіе $\pi = \frac{3927}{1250}$. Онъ говоритъ, что зная сторону правильнаго вписаннаго въ кругъ шестиугольника были вычислены послѣдовательно стороны 12-ти, 24-хъ,... и 384-хъ-угольниковъ, послѣдовательнымъ дѣленіемъ соотвѣтствующихъ дугъ пополамъ. Подобный пріемъ, какъ извѣстно, былъ примѣненъ также Архимедомъ и Птоломеемъ, а потому на основаніи этого нѣкоторые математики утверждаютъ, что многія изъ своихъ познаній въ Геометріи индусскіе математики заимствовали отъ греческихъ геометровъ. Весьма интересенъ пріемъ, помощью котораго Ганеза находитъ площадь круга, которую онъ полагаетъ равной площади

прямоугольника, построеннаго на радіусѣ и половинѣ длины окружности. Вмѣсто всякихъ разсужденій и доказательствъ Ганеза довольствуется слѣдующимъ построеніемъ, которое онъ поясняетъ однимъ словомъ „смотри“ (фиг. 5).

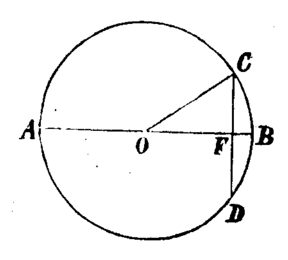
Фиг. 5.



Пріемъ Ганезы состоитъ въ слѣдующемъ: площадь круга онъ разбиваетъ на секторы; затѣмъ кругъ разрѣзываетъ по діаметру пополамъ, а каждую изъ половинъ снова разрѣзываетъ столько разъ, сколько въ ней секторовъ. Разрѣзавъ полукруги, онъ ихъ выправляетъ и получаетъ двѣ фигуры, имѣющія сходство съ пилами. Площади этихъ двухъ пилъ тождественны и сумма ихъ равна площади круга. Обѣ пилы составляютъ прямоугольникъ, основаніе, котораго равно половинѣ окружности даннаго круга, а высота равна радіусу. Изъ этого онъ заключаетъ, что площадь круга равна половинѣ произведенія окружности на радіусъ. Подобный методъ доказательства вполнѣ въ духѣ индусскихъ геометровъ, для которыхъ, какъ мы выше замѣтили, исходною точкою при всѣхъ доказательствахъ справедливости предложеній служило начало наглядности или очевидности.

Баскара даетъ также правила для нахожденія поверхности и объема шара, чего нѣтъ въ сочиненіи Брамагупты. Одинъ изъ комментаторовъ го-

Фиг. 6.



воритъ, что при нахожденіи объема шара, слѣдуетъ разсматривать шаръ, какъ состоящій изъ иглоподобныхъ пирамидъ, вершины которыхъ сходятся въ центрѣ шара, а основанія лежатъ на поверхности шара. Въ слѣдующихъ предложеніяхъ этой главы показано соотношеніе между хордой, діа-

метромъ и высотой сегмента круга. Называя чрезъ d діаметръ AB круга, чрезъ s—хорду CD и чрезъ x—высоту FB сегмента (фиг. 6), или какъ ее называли индусы *utkramajyâ*, т. е. *стрѣла*, Баскара находитъ выраженіе:

$$\frac{s^2}{4} = dx - x^2 \qquad (1)$$

или

$$s = 2\sqrt{x(2r-x)}$$

По даннымъ двумъ изъ величинъ входящихъ въ это выраженіе Баскара даетъ выраженіе для третьей. Изъ числа геометрическихъ предложеній этой главы укажемъ еще на выраженія хорды въ функціи дуги и обратно, которыя были вѣроятно найдены эмпирически. Обозначивъ чрезъ s—хорду, c—окружность, a—дугу и d—діаметръ, формулы имѣютъ слѣдующій видъ:

$$s = \frac{4d(c-a)a}{\frac{5}{4}c^2-(c-a)a} \quad \text{и} \quad a = \frac{c}{2} - c\sqrt{\frac{d-s}{s+4d}}$$

Выраженія эти точны до вторыхъ десятичныхъ знаковъ, а потому представляютъ довольно грубую степень приближенія, но тѣмъ не менѣе онѣ интересны въ томъ отношеніи, что при помощи ихъ были вѣроятно вычислены первыя таблицы синусовъ.

Выраженіе (1) встрѣчается также въ сочиненіяхъ Брамагупты, только въ иномъ видѣ, онъ опускаетъ членъ x^2. Такое допущеніе возможно только при очень малой величинѣ x. Въ такомъ видѣ выраженіе это представляетъ предложеніе, извѣстное уже Аріабаттѣ, что квадратъ полухорды равенъ произведенію отрѣзковъ діаметра перпендикулярнаго этой хордѣ. Если допустить, что индусскимъ геометрамъ было извѣстно предложеніе, что всякій уголъ вписанный въ полуокружность прямой, то справедливость предложенія извѣстнаго Аріабаттѣ легко было обнаружить.

Главы VII, VIII, IX и X относятся къ измѣренію объемовъ тѣлъ при рѣшеніи различныхъ практическихъ вопросовъ. Изложеніе тоже, что и въ сочиненіи Брамагупты. Поименованныя главы очень коротки и не заключаютъ ничего интереснаго.

Глава XI озаглавлена „тѣнь гномона“. Въ этой главѣ Баскара занимается вопросомъ объ измѣреніи при помощи тѣней. Называя чрезъ g высоту гномона, h—высоту свѣтящейся точки, d—разстояніе основанія источника свѣта отъ гномона и l—длину тѣни, изъ подобія треугольниковъ найдемъ слѣдующее соотношеніе между этими величинами:

$$lh = gd + gl$$

По даннымъ тремъ изъ величинъ l, h, d и g можно всегда найти четвертую; для этой цѣли Баскара даетъ правила.

Въ заключеніи главы онъ говоритъ: „Подобно высшему существу, которое избавляетъ своихъ почитателей отъ страданій и которое есть единственная причина сотворенія міра, все проникающее и все обнимающее, въ его различныхъ проявленіяхъ, какъ то: въ видѣ міровъ, раевъ, рѣкъ, горъ, боговъ, чертей, людей, деревьевъ и городовъ, точно также и настоящее собраніе предписаній проникнуто и обнимается правиломъ трехъ членовъ. Но если это есть простое основаніе, то почему же оно съ такимъ трудомъ столькими писателями такъ обстоятельно излагается? Отвѣтъ слѣдующій: все то, что всегда вычисляется въ Алгебрѣ или Ариѳметикѣ при посредствѣ одного множителя или дѣлителя, глубокіе ученые принимаютъ за правило трехъ членовъ. Однако, свѣдущими наставниками оно было раздѣлено на различныя и разнообразныя правила; они излагали эти видоизмѣненныя, болѣе простыя, правила, думая чрезъ это поднять уровень образованія немногихъ избранныхъ, подобныхъ намъ“.

Глава XII занимается рѣшеніемъ нѣкоторыхъ неопредѣленныхъ вопросовъ въ цѣлыхъ числахъ, но такъ какъ объ этомъ Баскара трактуетъ болѣе подробно въ своей Алгебрѣ, то мы на этой главѣ неостановимся.

Глава XIII—послѣдняя. Въ этой главѣ говориться о различныхъ соединеніяхъ, спачала о перемѣщеніяхъ, а потомъ и о сочетаніяхъ. Выраженія, показывающія число различныхъ перемѣщеній и сочетаній вполнѣ вѣрны, изъ чего можно заключить, что съ этимъ вопросомъ индусскіе математики были вполнѣ основательно знакомы.

Вопросъ о различныхъ сочетаніяхъ является у индусовъ очень древнимъ. Первые слѣды его нѣкоторые ученые видятъ въ двадцати четырехъ именахъ Вишну, которыя онъ носитъ смотря по тому порядку въ какомъ онъ держитъ въ своихъ четырехъ рукахъ дубину, цѣль, цвѣтокъ лотоса и раковину. Особенное значеніе имѣлъ вопросъ о числѣ различныхъ сочетаній и перемѣщеній въ индусской просодіи, гдѣ перечисляются всѣ возможные случаи образованія стиховъ, состоящихъ изъ одинаковаго числа слоговъ, въ зависимости отъ долготы и краткости отдѣльныхъ слоговъ *). Хотя Баскара даетъ правила для нахожденія числа различныхъ соединеній и сочетаній безъ всякихъ доказательствъ, но тѣмъ не менѣе онѣ заслуживаютъ особеннаго вниманія, такъ какъ извѣстно, что вопросъ этотъ былъ почти совершенно чуждъ древнимъ греческимъ геометрамъ и вполнѣ принадлежитъ индусамъ у которыхъ онъ получилъ вѣроятно свое первоначальное развитіе **).

*) Интересныя указанія по этому вопросу можно найти въ статьѣ: „*Albr. Weber*, Ueber die Metrik der Inder“, помѣщенной въ „Indische Studien“, T. VIII pag. 326 - 328 и 425.

**) Есть указанія, что вопросъ о соединеніяхъ и сочетаніяхъ былъ извѣстенъ древнимъ греческимъ философамъ. Вопросъ этотъ былъ извѣстенъ *Аристотелю* и былъ примѣненъ ученикомъ его *Аристоксеномъ* изъ Тарента къ нахожденію числа возможныхъ соединеній извѣстныхъ элементовъ. Кромѣ того вопросъ о соединеніяхъ и сочетаніяхъ занималъ *Ксенократа*, стоика *Хрисиппа* (282—209 гг. до Р. Х.), а также, по словамъ Плутарха, *Гиппарха*. Когда жилъ послѣдній Плутархъ ничего не говоритъ, онъ упоминаетъ только, что Гиппархъ этотъ „принадлежалъ къ числу ариѳметиковъ“. Весьма вѣроятно, что это извѣстный астрономъ Гиппархъ, жившій между 161 и 126 гг. до Р. Х. Такое предположеніе еще тѣмъ заслуживаетъ вниманія, что по словамъ нѣкоторыхъ арабскихъ писателей Гиппархъ написалъ сочиненіе „О квадратныхъ уравненіяхъ“, объ этомъ мы уже упоминали (см. стр. 237). Астрономъ Гиппархъ былъ родомъ изъ Никеи, въ Битиніи; онъ производилъ свои наблюденія на островѣ Родосѣ (объ Гиппархѣ см. стр. 111—112).

Въ концѣ своей Ариѳметики Баскара говоритъ слѣдующее: „Счастіе и радость, безъ сомнѣнія, будутъ постоянно возрастать въ этомъ мірѣ для тѣхъ, которые посвятили себя благородному искусству Лилавати; прекрасно составлены всѣ ея части, чисты и совершенны ея рѣшенія и изященъ ея языкъ *)“.

Познакомившись вкратцѣ съ содержаніемъ ариѳметическаго сочиненія Баскары, перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію второй части „Сидгантаціромани“, которая заключаетъ Алгебру или какъ Баскара ее называетъ „Віаганита“, т. е. „вычисленіе корней“.

Віаганита. Въ введеніи къ своему сочиненію Баскара опредѣляетъ предметъ Алгебры въ слѣдующихъ выраженіяхъ:

„Я почитаю невидимое первобытное существо, о которомъ говорятъ ланкгіасы (ученые), что оно есть источникъ познавательной способности, которой обладаютъ всѣ одушевленныя существа и которая служитъ къ ихъ развитію; оно есть единственное основаніе всего видимаго. Я молю управляющую силу, которая считается мудрецами, знакомыми съ природой, началомъ всѣхъ познаній, такъ какъ она есть единственное начало всего видимаго. Я глубоко почитаю математику, потому что знакомые съ ней видятъ въ ней средство къ пониманію всего существующаго; она есть основаніе всего видимаго“.

„Такъ какъ дѣйствія надъ извѣстными величинами, какъ мы уже видѣли, были основаны на дѣйствіяхъ при помощи неизвѣстныхъ величинъ и такъ какъ рѣшеніе вопросовъ можетъ быть понято весьма немногими, и совершенно непонято людьми слабо одаренными отъ природы, то я предпринялъ, въ настоящее время, изложить и разобрать сущность Алгебры или анализа“.

*) Сочиненія Баскары пользовались большой извѣстностью у индусскихъ ученыхъ, такъ какъ онѣ были комментированы многими учеными. Изъ числа такихъ комментаторовъ болѣе извѣстны: *Гангадгара* (Gangadhara), жившій около 1420 г.; *Суріадаза* (Suryadâsa)—около 1540; *Ганеза* (Ganeça)—около 1545; *Ранганата* (Ranganâtha)—около 1640; *Рама-Кришна* (Râma-Krishna); *Кришна-Бгатта* (Krishna-Bhatta). Время, когда жили послѣдніе два комментатора неизвѣстно.

Сочиненіе Баскары состоитъ изъ восьми главъ, съ содержаніемъ которыхъ мы теперь познакомимся.

Глава I озаглавлена „36 дѣйствій“ (*shat-trimçat pari-karmâni*). Она состоитъ изъ пяти отдѣловъ, изъ которыхъ первый подраздѣляется снова на два. Отдѣлы эти содержатъ:

1-й и 2-й шесть дѣйствій надъ плюсомъ и минусомъ (***shadvidham dhana-rna***).
3-й — шесть дѣйствій надъ нулемъ (***shadvidham kha***).
4-й — шесть дѣйствій надъ неизвѣстнымъ (***shadvidham avyakta***).
5-й — шесть дѣйствій надъ нѣсколькими неизвѣстными (***shadvidham aneka-varna***).
6-й — шесть дѣйствій надъ ирраціональными величинами (***shadvidham karani***).

Подъ именемъ *шести дѣйствій* Баскара понимаетъ сложеніе, вычитаніе умноженіе, дѣленіе, возвышеніе въ степень и извлеченіе корней.

Первый изъ поименованныхъ отдѣловъ кромѣ различныхъ примѣровъ содержитъ *правила*—***sûtras***, изложенныя въ стихотворной формѣ. Правила эти состоятъ въ слѣдующемъ:

1) При сложеніи складываютъ двѣ *потери* или два *имущества;* разность между *выигрышемъ* и *долгомъ* равна ихъ суммѣ.

2) Правило при вычитаніи: *имущество* дѣлается *долгомъ*, *долгъ—имуществомъ*; затѣмъ производятъ сложеніе какъ указано.

3) Произведеніе двухъ *имуществъ* или же двухъ *неимуществъ* есть *имущество;* произведеніе *имущества* и *долга* есть *долгъ*. Тоже правило имѣетъ мѣсто при дѣленіи.

4) Квадратъ *имущества* или *долга* есть *имущество; имущество* имѣетъ два корня, одинъ въ видѣ *выигрыша*, другой въ видѣ *долга*. Корень изъ *долга* несуществуетъ, такъ какъ послѣдній не есть квадратъ.

Изъ приведенныхъ правилъ видно, что Баскара положительнымъ величинамъ—***dhanam*** придаетъ значеніе *имущества*, *богатства*, *выигрыша;* отрицательнымъ же—***rnam*** значеніе *долга*, *потери*. Кромѣ того правила эти указываютъ вполнѣ ясно, что Баскара имѣлъ понятіе о двойномъ знакѣ при радикалѣ второй степени.

Третій отдѣлъ посвященъ дѣйствіямъ надъ нулемъ. Баскара говоритъ: „увеличенные или уменьшенные на нуль имущество и долгъ остаются безъ измѣненія; вычтенные изъ нуля они принимаютъ обратное значеніе“ (т. е. долгъ дѣлается имуществомъ, а имущество долгомъ). Изъ сказаннаго видно, что Баскара представлялъ себѣ отрицательное количество, какъ количество положительное, только отсчитываемое внизъ отъ нуля.

Далѣе Баскара говоритъ: „дѣлимое 3; дѣлитель 0; результатъ дѣленія $\frac{3}{0}$, который есть безконечность, называется частное отъ нуля. Онъ не претерпѣваетъ измѣненій. Величина, которую называютъ „частное отъ нуля“, не можетъ ни увеличиться, ни уменьшиться, какія-бы большія сложенія или вычитанія мы не производили, подобно тому какъ ко времени, не имѣющему ни начала, ни конца, цѣлыя серіи существованій (бытіе)“.

Изъ содержанія поименованныхъ трехъ отдѣловъ первой главы мы видимъ, что Баскара имѣлъ вполнѣ ясное представленіе объ положительныхъ и отрицательныхъ количествахъ и объ ихъ различіи. Онъ зналъ, что корень квадратный имѣетъ два значенія—одно положительное, другое отрицательное; что нельзя извлечь корень квадратный изъ отрицательнаго числа. Ему было также извѣстно, что дробь, которой знаменатель нуль, безконечно велика; что произведеніе двухъ отрицательныхъ чиселъ есть число положительное, а произведеніе положительнаго числа и отрицательнаго—число отрицательное. Впрочемъ необходимо замѣтить, что послѣднія правила были извѣстны еще Аріабаттѣ.

Въ 4-мъ отдѣлѣ показаны дѣйствія надъ буквенными величинами и даны примѣры на числахъ, и наконецъ въ 5-мъ отдѣлѣ показаны дѣйствія надъ ирраціональными величинами.

Скажемъ теперь нѣсколько словъ о томъ какъ обозначали индусскіе математики неизвѣстныя и извѣстныя величины, а также уравненія.

Неизвѣстную величину они называли ***yavat-tavat***, что соотвѣтствуетъ латинскому выраженію ***tantum-quantum*** *). Для обозначенія неизвѣстной величины x служилъ знакъ या, соотвѣтствующій слогу ***ya***. Квадратъ неизвѣстной величины, т. е. x^2, они обозначали знакомъ या व, который соотвѣтствуетъ сокращенному слову ***varga***. Если приходилось имѣть дѣло съ нѣсколькими неизвѣстными величинами, напр. $x, y, z, \ldots$, то индусскіе математики различали ихъ по цвѣтамъ **), обозначая одну неизвѣстную знакомъ का—***ka*** (***kâlaca***—черная), другую знакомъ नी—***ni*** (***nilaca***—голубая), третьею знакомъ पी—***pi*** (***pilaca***—желтая), четвертую знакомъ लो—***lo*** (***lôhitaca***—красная) и т. д. Коэфиціенты ставились всегда позади неизвѣстнаго, рядомъ съ нимъ. Извѣстная величина сопровождалась всегда словомъ

*) Роде высказываетъ предположеніе, что терминъ *yâvat-tâvat*, обозначающій неизвѣстное и соотвѣтствующій термину *tantum-quantum*, есть ничто иное какъ переводъ на санскритскій языкъ греческаго ἀριθμός, которое само есть переводъ египетскаго *hâ* (*hau*)—*куча*, означающимъ неизвѣстную величину въ папирусѣ Ринда (см. стр. 333).

**) Обозначеніе неизвѣстныхъ величинъ названіями цвѣтовъ своимъ происхожденіемъ вѣроятно обязано тому, что на санскритскомъ языкѣ буквы носили названія цвѣтовъ.

rupa, что означаетъ *опредѣленное число.* Знака равенства въ уравненіяхъ несуществовало, а обѣ части уравненія писали одну подъ другой.

Для поясненія изложеннаго мы считаемъ не безъинтереснымъ привести уравненіе, заимствованное нами изъ сочиненія Баскары. Вотъ это уравненіе:

या व २	यां १	रू ३०	=	*ya bha* 2	*ẏa* 1	*ru* 30
या व ०	या ०	रू ८		*ya bha* 0	*ya* 0	*ru* 8

уравненіе это, написанное настоящимъ алгебраическимъ языкомъ будетъ имѣть видъ:

$$2x^2-x+30$$
$$=0x^2+0x+8$$

или же написанное въ общеупотребительной формѣ, оно приметъ видъ:

$$2x^2-x+30=8$$

Глава II содержитъ рѣшеніе неопредѣленныхъ уравненій первой степени (*cuttuca d'hyaya*). Глава эта есть дальнѣйшее развитіе, сказаннаго въ двѣнадцатой главѣ „Лилавати“ *).

Мы уже выше видѣли, что рѣшеніе неопредѣленныхъ уравненій первой степени было извѣстно еще Аріабгаттѣ. Въ сочиненіи Баскары всѣ неопредѣленныя уравненія первой степени предложены для рѣшеній въ формѣ $\frac{ax+b}{c}=y$, при чемъ требуется опредѣлить x въ цѣлыхъ числахъ такъ, чтобы $ax+b$ дѣлилось-бы безъ остатка на c, т. е. чтобы y было число цѣлое.

Глава III содержитъ рѣшеніе неопредѣленныхъ уравненій второй степени *(varga pacriti)*. Глава эта состоитъ изъ трехъ отдѣловъ. Въ 1-мъ отдѣлѣ изложенъ пріемъ для рѣшенія уравненій формы $ax^2+1=y^2$, при чемъ a коэфиціентъ, 1—слагаемое, x—меньшій корень, а y большій. Методъ состоитъ въ слѣдующемъ: если найдено послѣдовательными пробами рѣшеніе $x=n$ и $y=m$, то будутъ также удовлетворять и $x=2mn$ и $y=an^2+m^2$, или если найдены два рѣшенія $x=n$, $y=m$ и $x=p$, $y=q$ то $x=mp\pm nq$ и $y=anp\pm mq$ будутъ новыя значенія, которыя также удовлетворятъ уравненію. Справедливость сказаннаго показано Баскарой на примѣрахъ, но доказательства онъ не приводитъ. Такъ какъ указанный пріемъ приводитъ къ цѣли только въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ, то

*) Обѣ главы носятъ одно и то же заглавіе. Кольбрукъ озаглавилъ ихъ *Pulverizer*, т. е. *раздробленіе*.

Баскара во 2-мъ отдѣлѣ даетъ болѣе общій пріемъ, извѣстный подъ именемъ *циклическаго*. Въ 3-мъ отдѣлѣ этой главы рѣшены различныя задачи.

Неопредѣленныя уравненія второй степени являются всегда у индусскихъ математиковъ подъ видомъ $ay^2+t=x^2$, къ которому они всегда умѣютъ ихъ сводить. Извѣстно, что Діофантъ умѣлъ рѣшать подобныя уравненія въ раціональныхъ числахъ, но только для частныхъ значеній $a=\alpha^2$ и $t=\sigma^2$, индусскіе же математики предложили *общій пріемъ* для рѣшенія уравненія $ay^2+1=x^2$ въ цѣлыхъ числахъ. Уравненіе это и въ настоящее время имѣетъ важное значеніе въ теоріи квадратныхъ формъ. Излагать въ чемъ состоялъ циклическій методъ мы не будемъ, такъ какъ это отвлекло бы насъ слишкомъ далеко, замѣтимъ только, что весь пріемъ основанъ на замѣчаніи, что если p и q суть рѣшенія уравненія $aq^2+t=p^2$, а p' и q' рѣшенія уравненія $aq'^2+t'=p'^2$, то $y=pq'\pm qp'$ и $x=pp'\pm aqq'$ будутъ тождественныя рѣшенія уравненія $ay^2+tt'=x^2$.

Циклическій методъ замѣчателенъ по глубинѣ мысли и тонкости пріемовъ *). По выраженію Ганкеля, пріемъ этотъ принадлежитъ къ числу самыхъ тонкихъ изслѣдованій, сдѣланныхъ въ теоріи чиселъ до Лагранжа. Пріемъ индусскихъ математиковъ былъ снова найденъ Лагранжемъ въ 1769 г. **). Задача, которою занимались индусы была снова впервые предложена Ферма въ 1657 г. и рѣшена англійскимъ математикомъ лордомъ Брункеромъ *(Brouncker)*. Впослѣдствіи задачей этой снова занялся Эйлеръ и свелъ ее на разложеніе въ непрерывныя дроби ***). Въ настоящее время рѣшеніе уравненія $ay^2+1=x^2$ извѣстно въ Анализѣ подъ именемъ *задачи Пилля (Pell)*, хотя она была извѣстна уже до него. Доказательства циклическаго пріема индусскіе математики не дали, такъ какъ давать доказательства вообще они считали излишнимъ, вѣроятно это входило въ устное преподаваніе ихъ ученыхъ. Также ими нэ было доказано, что пріемъ этотъ всегда годится если a число не квадратное; доказать это пытался уже Валлисъ ****), но успѣлъ въ этомъ только Лагранжъ.

Рѣшеніе уравненій формы $ax^2+b=cy^2$ указываетъ, что Баскарѣ были извѣстны такъ называемые *квадратичные вычеты* и *кубическіе вычеты*.

Глава IV содержитъ рѣшеніе уравненій первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ. При помощи уравненій рѣшается много вопросовъ, которые

*) Сущность циклическаго метода изложена въ сочиненіи: *Hankel*, Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter. Leipzig. 1874. in-8. pag. 200—205.

**) Sur la solution d'un problème indéterminé du 2 degré. Mémoires de l'Académie de Berlin. 1769. T. XXIII.

***) De usu novi algorithmi. Novi Comment. Petrop. 1767. T. XI.

****) *Wallis*, Opera mathem. T. II. Commercium epist. Ep. 9, 14, 17, 18, 19, 46; а также въ его „Алгебрѣ“, С. 98, 99.

были уже разобраны въ Ариѳметикѣ Баскары. Правилъ указано немного; отдѣльные случаи пояснены на частныхъ примѣрахъ. Мы уже выше упомянули, что всякое уравненіе первой степени формы:

$$6x+300=10x-100$$

индусскіе математики писали въ видѣ:

ya 6 *ru* 300

ya 10 *ru* 100

если же какого нибудь члена недоставало, въ уравненіяхъ написанныхъ въ такой формѣ, напр. уравненіе:

$$6x=24$$

то недостающіе члены замѣщали нулемъ, т. е. писали уравненіе въ формѣ:

ya 6 *ru* 0

ya 0 *ru* 24

Рѣшеніе уравненій получается вычитая одинъ рядъ изъ другаго; такимъ образомъ для перваго изъ написанныхъ уравненій мы будемъ имѣть:

ya 4 *ru* 400

откуда слѣдуетъ, что *ya* равно *ru* 100. Въ послѣднемъ видѣ и даются рѣшенія уравненій.

Нѣкоторые изъ вопросовъ этой главы сводятся на рѣшеніе уравненій со многими неизвѣстными, а другіе на рѣшеніе неопредѣленныхъ уравненій. Изъ числа послѣднихъ укажемъ на вопросы, которые сводятся на рѣшеніе уравненій вида $Ax^2=Bx$ и $Ax^3=Bx^2$; уравненія эти Баскара, подобно Діофанту, причисляетъ къ числу уравненій первой степени. Нѣкоторыя изъ уравненій этой главы напоминаютъ своими рѣшеніями остроумные пріемы Діофанта; многіе вопросы Баскара рѣшаетъ не менѣе искусстно и просто, при этомъ рѣшеніе нѣкоторыхъ изъ нихъ онъ приписываетъ болѣе древнимъ писателямъ. Изъ числа вопросовъ этой главы укажемъ на слѣдующее уравненіе съ двумя неизвѣстными, которое сводится къ рѣшенію уравненія съ однимъ неизвѣстнымъ. Задача состоитъ въ слѣдующемъ: „Нѣкто сказалъ своему пріятелю: другъ мой, дай мнѣ 100 и я буду вдвое богаче тебя! второй отвѣтилъ: если ты мнѣ дашь 10, то я буду въ шесть разъ богаче тебя! Спрашивается сколько имѣетъ каждый?“ Баскара полагаетъ, что первый имѣетъ $2x-100$, а второй $x+100$; такое положеніе удовлетворяетъ первой части вопроса; затѣмъ онъ полагаетъ $2x-110=6(x+110)$, откуда $x=70$, а потому $2x-100=40$ и $x+100=170$.

Въ одномъ изъ неопредѣленныхъ вопросовъ этой главы различные предметы обозначены начальными буквами своихъ названій, что подало

мысль нѣкоторымъ ученымъ видѣть въ этомъ первое начало употребленія буквъ, вмѣсто чиселъ, при производствѣ ариѳметическихъ операцій. Но едва-ли такое мнѣніе заслуживаетъ вниманія. Кромѣ того многіе изъ вопросовъ этой главы напоминаютъ задачи, рѣшенныя Діофантомъ въ VI-й книгѣ „Ариѳметикъ“, такъ напримѣръ: „найти прямоугольный треугольникъ, въ которомъ величина гипотенузы выражалась тѣмъ же числомъ, что и площадь“; полагая гипотенузу, высоту и основаніе соотвѣтственно равными: $(m^2+n^2)x$, $2mn.x$ и $(m^2-n^2)x$; требуется чтобы $(m^2+n^2)x=mn(m^2-n^2)x^2$, т. е. находимъ:

$$x=\frac{m^2+n^2}{mn(m^2-n^2)}.$$

Другая задача: „найти прямоугольный треугольникъ, коего площадь выражалась тѣмъ же числомъ, что и произведеніе сторонъ“. Или же, „найти два числа, такихъ свойствъ, чтобы ихъ сумма, а также ихъ разность были квадраты, произведеніе же было кубъ“. Полагая одно число $(m^2+n^2)x^2$, другое $2mnx^2$, удовлетворимъ двумъ первымъ требованіямъ вопроса; третье условіе требуетъ, чтобы $2mn(m^2+n^2)x^4$ было кубъ. „Найти два числа, коихъ сумма кубовъ была бы квадратъ, а сумма квадратовъ—кубъ“. Многіе вопросы этой главы рѣшены въ умѣ, безъ всякихъ вычисленій, съ большимъ умѣніемъ. Извѣстно, что индусскіе ученые еще до настоящаго времени поражаютъ европейцевъ умѣніемъ быстро производить въ умѣ самыя сложныя вычисленія *).

Изъ числа уравненій первой степени, рѣшенныхъ Баскарой, укажемъ на слѣдующія, находящіяся въ третьей главѣ „Лилавати“. Уравненія эти мы приводимъ, чтобы читатель могъ себѣ составить понятіе о формѣ, въ которой индусскіе математики предлагали вопросы для рѣшеній. Задачи эти слѣдующія: „пятая часть числа пчелъ роя сѣла на цвѣтокъ кадамба, третья—на цвѣтокъ силиндга. Утроенная разность послѣднихъ двухъ чиселъ полетѣла на цвѣты кутая; кромѣ того осталась еще одна пчела, которая летаетъ то взадъ, то впередъ, будучи привлечена прекраснымъ запахомъ жасмина и пандамуса. Скажи мнѣ восхитительная женщина число пчелъ?“ Другая задача: „во время свиданія между двумя влюбленными порвалась у влюбленной нитка жемчуга; $\frac{1}{6}$ жемчужинъ упала на полъ, $\frac{1}{5}$ осталась на мѣ-

*) Различные путешественники разсказываютъ, что индусскіе ученые производили весьма сложныя вычисленія при помощи однѣхъ только раковинъ, которыя замѣняли имъ жетоны. Результаты, достигнутые браминами въ предвычисленіи солнечныхъ и лунныхъ затмѣній весьма близки къ дѣйствительности. Европейцевъ поражаетъ то необыкновенное хладнокровіе и та сосредоточенность съ которыми брамины производятъ свои вычисленія. Не смотря на все несовершенство подобнаго способа, индусы рѣдко ошибаются въ своихъ выкладкахъ.

стѣ, гдѣ они сидѣли, $\frac{1}{6}$ — спасла влюбленная, $\frac{1}{10}$ взялъ себѣ влюбленный и кромѣ того осталось еще 6 жемчужинъ; скажи сколько было всего жемчужинъ на ниткѣ". Задачи эти Баскара приписываетъ Кридгарѣ.

Глава V занимается рѣшеніемъ уравненій второй степени; рѣшеніе ихъ Баскара приписываетъ Аріабгаттѣ. Въ очень простой формѣ предлагаетъ Баскара правило для рѣшеній, которое можетъ быть приложено и къ нѣкоторымъ отдѣльнымъ случаямъ рѣшенія уравненій высшихъ степеней. Для уравненій къ которымъ нельзя примѣнить указанныя правила, Баскара пользуется различными искусственными пріемами. Такъ напр. при рѣшеніи уравненія $mx^2+ax=b$ онъ сперва умножаетъ это уравненіе на $4m$ и получаетъ $4m^2x^2+4amx=4bm$; затѣмъ онъ прибавляетъ къ обѣимъ частямъ по a^2 и получаетъ $4m^2x^2+4amx+a^2=a^2+4bm$, извлекая изъ полученнаго уравненія корень, получаемъ:

$$2mx+a=\sqrt{a^2+4bm}\ \text{, или } 2mx=-a+\sqrt{a^2+4bm}$$

а слѣдовательно:

$$x=\frac{-a+\sqrt{a^2+4bm}}{2m}$$

Послѣдняя формула есть общій видъ рѣшенія уравненій второй степени Кромѣ того Баскара разсматриваетъ еще частные случаи, именно:

$$mx^2+ax=b,\quad mx^2-ax=b,\quad mx^2+ax=-b,\quad mx^2-ax=-b.$$

Когда a отрицательно, какъ во второмъ и четвертомъ случаяхъ, и $\sqrt{a^2-4bm}$ меньше отъ a, то x имѣетъ два значенія, въ противномъ случаѣ одно. Отрицательныя значенія Баскара причисляетъ къ числу невозможныхъ, такъ какъ по его словамъ „абсолютно отрицательныя числа люди не принимаютъ во вниманіе". По мнѣнію Баскары двойственное значеніе корня квадратнаго уравненія возможно только въ случаѣ, когда оба корня положительны. Онъ поясняетъ это на примѣрѣ: „Стая обезьянъ забавлялась: одна осьмая часть ихъ въ квадратѣ бѣгала въ лѣсу, остальныя двѣнадцать кричали на верхушки холмика. Скажи мнѣ сколько было всего обезьянъ?" Отвѣтъ даетъ два рѣшенія 48 и 16. Уравненіе это Баскара рѣшаетъ слѣдующимъ образомъ:

„Полагая здѣсь стаю обезьянъ $=x$; квадратъ осьмой части, увеличенный на двѣнадцать, равенъ всей стаѣ по условію вопроса, а потому обѣ части уравненія будутъ:

$$\frac{x^2}{64}+0x+12=0x^2+x+0$$

Приводя къ одному знаменателю и дѣлая приведеніе, найдемъ:

$$x^2-64x=-768$$

прибавляя къ обѣимъ частямъ квадратъ 32 и извлекая квадратный корень, получимъ:

$$x-32=16$$

Въ данномъ случаѣ отрицательныя единицы первой части таковы, что единицы второй части меньше ихъ, а потому послѣднія можно принимать положительными и отрицательными и получаемъ двойное значеніе x, 48 и 16".
Таково разсужденіе Баскары, на основаніи котораго онъ въ приведенномъ уравненіи допускаетъ два рѣшенія. Въ другомъ примѣрѣ Баскара разсуждаетъ иначе; примѣръ этотъ слѣдующій: „найти число обезьянъ стаи, одна пятая которой безъ трехъ въ квадратѣ спряталась въ пещерѣ, кромѣ того одна рѣзвится въ лѣсу". Вопросъ этотъ приводитъ къ рѣшенію уравненія:

$$\left(\frac{x}{5}-3\right)^2+1=x$$

или:

$$x^2-55x=-250$$

корни его будутъ:

$$x_1=50 \quad \text{и} \quad x_2=5$$

Второе рѣшеніе Баскара отбрасываетъ, такъ какъ $\frac{1}{5}5-3$ есть число отрицательное, но одинъ изъ комментаторовъ сочиненій Баскары *Кришна-Біатта (Krichna-Bhatta)* даетъ слѣдующее интересное толкованіе второму значенію корня, онъ говоритъ: „если-бы по условію вопроса было сказано: *одна пятая часть стаи вычтенная изъ трехъ*, то второе изъ рѣшеній $x_2=5$ было-бы удовлетворяющее условію вопроса, а не первое $x_1=50$, потому что пятая часть этого числа не можетъ быть вычтена изъ 3".

Приведемъ еще одно изъ уравненій второй степени, рѣшенныхъ Баскарой: „Корень квадратный изъ половины числа пчелъ роя полетѣлъ на кустъ жасмина; $\frac{8}{9}$ цѣлаго роя осталась дома; одна самочка полетѣла за самцемъ, который жужжитъ въ цвѣткѣ лотоса, куда онъ попалъ ночью, привлеченный пріятнымъ запахомъ, и изъ котораго онъ не можетъ выйти, такъ какъ цвѣтокъ закрылся. Скажи мнѣ число пчелъ роя?" Чтобы рѣшить это уравненіе Баскара полагаетъ число пчелъ роя равнымъ $2x^2$, тогда квадратъ половины числа пчелъ роя будетъ x, а $\frac{8}{9}$ всего роя будетъ $\frac{16}{9}$ и онъ составляетъ уравненіе:

$$2x^2+0x+0=\frac{16}{9}x^2+x+2$$

или:

$$18x^2+0x+0=16x^2+9x+18$$

или:

$$2x^2-9x+0=0x^2+0x+18$$

откуда:

$$2x^2-9x=18$$

слѣдовательно:

$$x=6 \quad , \text{а} \quad 2x^2=72$$

т. е. число пчелъ роя равно 72.

Мы остановились болѣе подробно на уравненіяхъ второй степени, рѣшенныхъ въ сочиненіи Баскары, во первыхъ потому, чтобы уяснить методы, примѣняемыя Баскарой при рѣшеніи этихъ уравненій, а во вторыхъ чтобы показать форму, въ которой индусскіе математики предлагали задачи для рѣшеній.

Изъ сказаннаго мы видимъ, на сколько опередили индусскіе математики, въ своихъ познаніяхъ въ Алгебрѣ, Діофанта. Двойственность рѣшеній квадратныхъ уравненій, неизвѣстная послѣднему, извѣстна индусскимъ математикамъ и сдѣланы были даже довольно удачныя попытки объяснить ее и дать ей геометрическое толкованіе, въ смыслѣ отсчитываній въ двухъ прямо противоположныхъ направленіяхъ.

Кромѣ рѣшенія уравненій второй степени въ сочиненіи Баскары встрѣчаются отдѣльные случаи рѣшенія уравненій высшихъ степеней. Изъ числа такихъ уравненій укажемъ на слѣдующее уравненіе третьей степени: $x^3-6x^2+12x=35$. Уравненіе это является у Баскары при рѣшеніи вопроса: „найти число такихъ свойствъ, чтобы умноженное на 12 и прибавленное къ своему кубу оно равнялось суммѣ изъ шести разъ взятаго его квадрата, увеличеннаго на 35. Рѣшая этотъ вопросъ Баскара составляетъ уравненіе:

$$x^3+12x=6x^2+35$$

которое онъ приводитъ къ формѣ:

$$x^3+12x-6x^2=35$$

вычитая изъ обѣихъ частей по 8 онъ находитъ:

$$(x-2)^3=27$$

или извлекая кубическій корень:

$$x-2=3$$

т. е.:

$$x=5$$

О другихъ корняхъ нѣтъ и помину.

Кромѣ того Баскара рѣшаетъ еще слѣдующее уравненіе четвертой степени:

$$x^4-2x^2-400x=9999$$

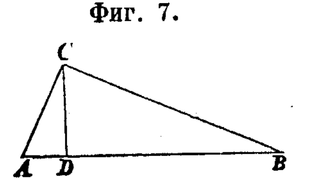
и находитъ корень $x=11$. При рѣшеніи этого уравненія онъ также пользуется искусственнымъ пріемомъ и дѣйствуетъ такъ сказать ощупью, безъ всякихъ опредѣленныхъ правилъ *).

Напомнимъ здѣсь, что Діофантъ умѣлъ также рѣшать только уравненія второй степени и что въ „Ариѳметикахъ“ встрѣчается только одинъ примѣръ рѣшенія уравненія третьей степени. У индусскихъ математиковъ впервые встрѣчаются уравненія, въ которыхъ одна изъ частей состоитъ исключительно изъ однѣхъ отрицательныхъ величинъ.

Въ концѣ пятой главы помѣщены нѣкоторыя приложенія къ Геометріи. Въ числѣ ихъ находится и ариѳметическое доказательство Пиѳагоровой теоремы, если только можно назвать доказательствомъ пріемъ, употребленный въ формѣ изложенной въ сочиненіи Баскары. Методъ индусскаго математика представляетъ поразительную противоположность съ пріемами древнихъ греческихъ геометровъ, у которыхъ доказательства теоремъ являлись какъ строго-логическія слѣдствія ряда заключеній, слѣдующихъ изъ цѣлаго ряда предложеній, основанныхъ и вытекающихъ изъ возможно наименьшаго числа аксіомъ. Въ „Віаганитѣ“ находиться два доказательства пиѳагоровой теоремы. Вмѣсто всякихъ формулъ и вычисленій даны только чертежи, при чемъ отдѣльныя части этихъ фигуръ обозначены числами, такъ какъ теорема дана для частнаго случая. Слово „смотри“, стоящее рядомъ съ фигурой, замѣняетъ собой всѣ толкованія и объясненія. Приведемъ оба доказательства.

Первое. Взятъ прямоугольный треугольникъ ABC, коего гипотенуза AB принята за основаніе и на нее опущенъ изъ вершины прямаго угла перпендикуляръ CD (фиг. 7). Составныя части этого треугольника: AB,

Фиг. 7.



BC, AC, CD, AD и DB приняты соотвѣтственно равными 25, 20, 15, 12,

*) Весьма любопытенъ пріемъ при помощи котораго Баскара рѣшаетъ поименованное уравненіе четвертой степени, онъ говоритъ: „вполнѣ ясно, что если прибавить къ первой части уравненія членъ $400x+1$, то первая часть будетъ имѣть корнемъ x^2-1; но вторая часть уравненія увеличенная на туже величину будетъ $400x+10000$ и не будетъ имѣть корня: такимъ пріемомъ нельзя получить рѣшенія уравненія, а потому необходимо прибѣгнуть къ искусственному пріему. Примѣняя его, прибавимъ къ обѣимъ частямъ по $4x^2+400x+1$, тогда обѣ части уравненія будутъ имѣть каждая корень; прибавляя эту величину къ первой части она обращается въ x^4+2x^2+1; прибавляя ко второй получимъ $4x^2+400x+10000$, а потому корни будутъ x^2+1 и $2x+100$; дѣлая приведенія, обѣ части обращаются въ x^2-2x и 99; сравнивая ихъ и прибавляя по 1 къ каждой части, корни будутъ $x-1$ и 10; сравнивая снова, наконецъ получимъ $x=11$“.

9 и 16; числа эти написаны около этихъ частей. Пиѳагорова теорема является какъ слѣдствіе пропорціональности нѣкоторыхъ изъ этихъ частей между собой. Въ самомъ дѣлѣ, въ такомъ треугольникѣ необходимо должны имѣть мѣсто пропорціи:

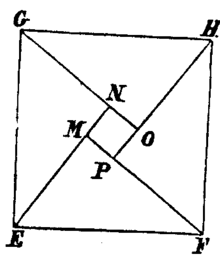
$$\frac{AC}{AB}=\frac{AD}{AC} \quad \text{и} \quad \frac{CB}{AB}=\frac{DB}{CB}$$

откуда:

$$AB(AD+DB)=AB^2=AC^2+CB^2$$

Второе. Квадратъ $EFHG$, построенный на гипотенузѣ EF прямоугольнаго треугольника EMF, разбитъ на четыре треугольника EMF, FPH, HOG, GNE и маленькій квадратикъ $MNOP$ (фиг. 8). На частяхъ

Фиг. 8.



EF, MN, EM, MF соотвѣтственно поставлены числа: 25, 5, 15, 20, изъ чего можно заключить, что Баскара справедливость этого предложенія поясняетъ на частномъ случаѣ. Никакихъ поясненій, кромѣ приведенныхъ чиселъ, Баскара недаетъ; онъ довольствуется словомъ „смотри", хотя, съ вѣроятностью можно предположить, что ему была извѣстна формула:

$$EF^2=4.\frac{EM.MF}{2}+(MF-EM)^2=MF^2+EM^2$$

Изъ другихъ предложеній, справедливость которыхъ обнаружена вышеприведеннымъ методомъ на фигурахъ, укажемъ еще на соотношенія:

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b) \quad \text{и} \quad (a+b)^2-4ab=(a-b)^2$$

Въ пятой главѣ „Віаганиты" находиться еще слѣдующее интересное предложеніе, которое напоминаетъ и представляетъ большое сходство съ однимъ изъ вопросовъ, рѣшенныхъ Діофантомъ въ „Поризмахъ". Задача Баскары состоитъ въ слѣдующемъ: „найти четыре числа, которыя будучи увеличины на 2, дали-бы квадраты; взявъ произведенія перваго на второе, перваго на третее и т. д. придавая каждому произведенію по 18, требуется чтобы снова эти числа были квадраты; наконецъ требуется, чтобы сумма корней всѣхъ квадратовъ, увеличенная на 11, равнялась-бы квадрату 13". Полагая четыре числа равными: x^2-2, $(x+a)^2-2$, $(x+b)^2-2$ и $(x+c)^2-2$. Отыскивая теперь такія числа a, b и c, чтобы произведенія изъ нихъ по два, сложенныя соотвѣтственно съ 18 составляли-бы квадратъ, найдемъ, что

$$a=\sqrt{\frac{18}{2}},\quad b=2\sqrt{\frac{18}{2}} \quad \text{и} \quad c=3\sqrt{\frac{18}{2}} \quad \text{или} \quad a=3,\ b=6 \ \text{и} \ c=9.$$

Изъ полученнаго видно, что искомыя числа должны составлять ариѳметическую прогрессію съ разностью 3.

Глава VI содержитъ уравненія со многими неизвѣстными. Она представляетъ собраніе примѣровъ уравненій опредѣленныхъ и неопредѣленныхъ первой степени. Рѣшеніе ихъ состоитъ въ томъ, что значенія неизвѣстнаго, опредѣленныя изъ однѣхъ уравненій подставляютъ въ другія. Если число неизвѣстныхъ больше на единицу числа уравненій, то въ концѣ остается одно уравненіе съ двумя неизвѣстными, которое рѣшается пріемомъ, изложеннымъ во второй главѣ. Если число неизвѣстныхъ еще больше, то, нѣкоторыя изъ нихъ выбираются произвольными. Изъ числа задачъ этой главы укажемъ на слѣдующія: „Найти два числа такихъ свойствъ, чтобы одно дѣленное на 5, дало въ остаткѣ 1, другое, дѣленное на 6, дало въ остаткѣ 2; разность же обѣихъ чиселъ, дѣленная на 3, должна дать 2, а сумма, дѣленная на 9, должна дать 5 въ остаткѣ; наконецъ произведеніе этихъ чиселъ, дѣленное на 7, должно дать въ остаткѣ 6". Другой примѣръ: „Найти число, которое будучи раздѣлено на 2, 3 и 5 дало соотвѣтственно въ остаткѣ 1, 2, 3, частныя же должны имѣть тоже свойство". Большая часть вопросовъ этой главы подобраны весьма удачно и рѣшены съ большимъ умѣніемъ и искусствомъ.

Глава VII занимается рѣшеніемъ неопредѣленныхъ уравненій второй степени. Большая часть вопросовъ этой главы относится къ различнымъ частнымъ случаямъ, а потому глава эта не представляетъ ничего цѣлаго, а просто собраніе отдѣльныхъ правилъ. Первыя правила этой главы показываютъ, какъ выраженія формы ax^2+bx могутъ быть приведены къ раціональной формѣ, или иными словами, какъ можетъ быть найдено рѣшеніе уравненія $ax^2+bx=y^2$ въ цѣлыхъ числахъ. По правилу слѣдуетъ данное уравненіе умножить на $4a$, тогда получимъ $4a^2x^2+4abx=4ay^2$ или $(2ax)^2+2(2abx)=4ay^2$; затѣмъ, прибавляя къ обѣимъ частямъ по b^2, найдемъ: $(2ax+b)^2=4ay^2+b^2$. Если теперь $4ay^2+b^2$ можетъ быть выражено числомъ квадратнымъ z^2, то $2ax+b=z$, а слѣдовательно $x=\frac{z-b}{2a}$. Такъ какъ z могутъ удовлетворять многія значенія, то между ними могутъ быть и такія, которыя выразятъ x числомъ цѣлымъ. Вышеприведеннымъ образомъ можетъ быть рѣшено уравненіе $6x^2+2x=y^2$, которое приводится къ виду $(6x+1)^2=6y^2+1$; одно рѣшеніе даетъ $y=2$, $z=5$, $x=\frac{2}{3}$, другое $y=20$,

$z=49$ и $x=8$ и т. д. Къ подобному уравненію сводится также вопросъ: „найти два числа m и n такія, чтобы $(m+n)^2+(m+n)^3=2(m^3+n^3)$“, который рѣшается положеніями: $m=x+y$ и $n=x-y$, изъ которыхъ вытекаетъ уравненіе $4x^3+4x^2=12xy^2$ или $(2x+1)^2=12y^2+1$; уравненіе это удовлетворяется рѣшеніями: $y=2$, $x=3$, $m=5$ и $n=1$, или же $y=28$, $x=48$, $m=76$ и $n=28$ и т. д.

Другое правило этой главы относиться къ уравненіямъ вида $ax^4\pm bx^2=y^2$, которыя преобразуются къ формѣ $x^2(ax^2\pm b)=y^2$. Если теперь $ax^2\pm b$ можетъ быть выражено числомъ квадратнымъ, то вопросъ рѣшенъ. Къ числу подобныхъ уравненій принадлежитъ уравненіе $5x^4-100x^2=y^2$, а также слѣдующіе вопросы: „найти два числа, которыхъ разность квадратъ, а сумма квадратовъ была-бы кубъ“. Требуемыя числа $m-n=x^2$ и $m^2+n^2=y^3$. Вопросъ рѣшается положеніемъ $y=x^2$ и уравненіе обращается въ $x^4(2x^2-1)=(2m-x^2)^2$, которому удовлетворяетъ $x=5$, откуда слѣдуетъ, что $m=100$, а $n=75$.

Другія правила относятся къ рѣшенію вопросовъ, примѣромъ которыхъ можетъ служить уравненіе $3x^2+6x=y^2+2y$. Другой вопросъ „найти значенія удовлетворяющія одновременно уравненіямъ: $ax^2+by^2=z^2$ и $ax^2-by^2+1=w^2$“. Какъ частный случай подобныхъ классовъ уравненій укажемъ на уравненія: $7x^2+8y^2=z^2$ и $7x^2-8y^2+1=w^2$, одно изъ рѣшеній которыхъ $x=4$ и $y=2$. Укажемъ еще на слѣдующія задачи: „найти условія, чтобы $3x+1$ и $5x+1$ были заразъ квадратами“; „найти условія, чтобы $2(m^2-n^2)+3$ и $3(m^2-n^2)+3$ были заразъ квадратами“.

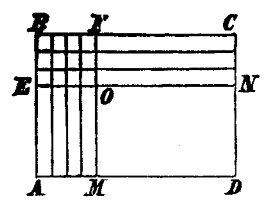
Далѣе слѣдуетъ теорія рѣшенія уравненій вида $ax+b=y^2$, при чемъ задачи являются въ формѣ $\frac{y^2-b}{a}=x$. Также рѣшены уравненія вида $ax+b=y^3$ и $cy^2=ax+b$ или же $\frac{cy^2-b}{a}=x$.

Глава VIII посвящена главнымъ образомъ рѣшенію уравненій вида $ax+by+c=xy$, а также $xyzu=a(x+y+z+u)$ и другихъ подобныхъ имъ. Рѣшеніе подобныхъ уравненій не представляетъ затрудненій и было извѣстно уже Брамагуптѣ, который примѣнялъ ихъ при астрономическихъ вопросахъ. Рѣшенія, данныя Баскарой весьма просты и изящны. Рѣшенія даны въ цѣлыхъ числахъ. Пріемъ, предложенный Баскарой, какъ мы замѣтили выше, былъ снова найденъ Эйлеромъ; онъ состоитъ въ слѣдующемъ: для частнаго случая $ax+by+c=xy$, изъ чиселъ a, b и c нужно составить новое число $ab+c$ и разложить его на два множителя. Если эти множители m и n, то $m+b$ или $n+b$ будутъ значенія x, а $n+a$ и $m+a$ соотвѣтствующія значенія y. Сколько будетъ существовать разложеній для $ab+c$, столько двойныхъ рѣшеній будетъ имѣть уравненіе. Справедливость указаннаго правила была извѣстна уже Брамагуптѣ и другимъ индусскимъ

математикамъ, жившимъ до Баскары. Весьма любопытно наглядное—геометрическое объясненіе, данное Баскарой для приведеннаго правила, при чемъ онъ замѣчаетъ: „математики назвали Алгеброй вычисленіе при помощи доказательствъ, такъ какъ въ противномъ случаѣ она не отличалась бы отъ Ариѳметики“. Къ сожалѣнію почти все сочиненіе Баскары противорѣчитъ его же словамъ, такъ какъ за весьма рѣдкими исключеніями можно указать на что нибудь, напоминающее доказательство.

Геометрическое толкованіе Баскары, о которомъ мы говорили, состоитъ въ слѣдующемъ: онъ прилагаетъ его къ частному случаю, именно къ уравненію $4x+3y+2=xy$. Представимъ себѣ прямоугольникъ $ABCD$ (фиг. 9), въ которомъ $AB=x$ и $AD=y$; площадь его выражается произведеніемъ xy, а также состоитъ изъ суммы трехъ частей: $4x$, $3y$ и 2. Отдѣлимъ отъ даннаго прямоугольника часть $4x=BM$, какъ указано на фигурѣ, то останется еще часть $3y+2=DF$. Отдѣливъ отъ верхней части фигуры

Фиг. 9



часть $3y=BN$, то видимъ, что каждому изъ только что отдѣленныхъ узенькихъ прямоугольниковъ недостаетъ по 4 маленькихъ квадратика, а слѣдовательно у всего отдѣленнаго прямоугольника BN ихъ недостаетъ $3.4=12$; такимъ образомъ мы выдѣлили еще часть $3y-12$. Въ остаткѣ получимъ прямоугольникъ $MOND$, состоящій очевидно изъ $12+2=14$. Принимая теперь $MD=1$, то $ND=14$, откуда $x=ND+NC=14+3=17$ и $y=MD+AM=1+4=5$. Или полагая: $MD=14$ и $ND=1$, то $x=1+3=4$ и $y=14+4=18$. Разлагая 14 на 2.7 и принимая $MD=2$ и $ND=7$, то найдемъ $x=7+3=10$ и $y=2+4=6$; или принимая $MD=7$ и $ND=2$, найдемъ $x=2+3=5$ и $y=7+4=11$. Точно такимъ же образомъ разсуждаетъ Баскара если a, b и c имѣютъ разные знаки.

Замѣтимъ здѣсь еще, что для подобныхъ уравненій, какъ вышеприведенное, даетъ рѣшенія уже Брамагупта. Пусть данное уравненіе будетъ $ax+by+c=dxy$. Нужно составить по правилу сумму произведеній $ab+cd$ и раздѣлить ее на произвольно выбранное число; пусть принятый дѣлитель и полученное частное будутъ m и n, тогда по правилу, если m больше n

и a больше b, то $\frac{m+b}{d}$ будетъ значеніе x, а $\frac{n+a}{d}$ значеніе y; если же b больше a, то $x=\frac{n+b}{d}$ и $y=\frac{m+a}{d}$. Точно такое же соотношеніе будетъ если n больше m, только необходимо чтобы всегда большее изъ чиселъ m и n сочеталось съ меньшимъ изъ чиселъ a и b и обратно, тогда значеніе x получается изъ суммы содержащей b, а значеніе y изъ суммы содержащей a. Лучше всего пояснить сказанное на частномъ примѣрѣ: $3x+4y+90=5xy$, тогда $5.90+3.4=462$, число это состоитъ изъ множителей 2.3.7.11; принимая 11 за дѣлитель, получимъ $\frac{462}{11}=42$, слѣдовательно $m=11$ и $n=42$. Такъ какъ $a=3$ и $b=4$, то $x=\frac{m+b}{d}=\frac{11+4}{5}=3$ и $y=\frac{42+3}{5}=9$; если принять дѣлителемъ 22, то $x=5$, и $y=5$. Не всегда можно получить указаннымъ путемъ цѣлыя значенія для x и y, но если подобныя значенія существуютъ, то ихъ всегда возможно отыскать вышеуказаннымъ методомъ. Баскара порицаетъ въ своемъ сочиненіи приведенный пріемъ Брамагупты и считаетъ его излишнимъ; вмѣсто него онъ совѣтуетъ прямо принять одно изъ неизвѣстныхъ произвольнымъ и по нему вычислить другое. Изъ сказаннаго ясно видно, что Баскара не понялъ методъ Брамагупты и не составилъ себѣ о немъ яснаго представленія, а пытался рѣшить вопросъ приближеніями.

Глава IX—послѣдняя, содержитъ краткое заключеніе.

Изъ этого краткаго очерка Алгебры индусовъ видно какого высокаго развитія достигли они въ этой наукѣ; въ этомъ отношеніи они стоятъ несравненно выше Діофанта—единственнаго изъ извѣстныхъ намъ греческихъ математиковъ, посвятившихъ себя Алгебрѣ. Символическій пріемъ развитый индусскими математиками, хотя во многихъ отношеніяхъ весьма несовершененъ, но тѣмъ не менѣе превосходитъ пріемъ Діофанта. Самыхъ блестящихъ результатовъ достигли индусскіе математики въ такъ называемомъ неопредѣленномъ анализѣ, который они довели до высокой степени совершенства. Вопросы неопредѣленнаго анализа обязаны своимъ происхожденіемъ у индусовъ ихъ астрономическимъ *) и религіознымъ воззрѣніямъ. Къ подоб-

---

*) Много интересныхъ данныхъ объ индусской Астрономіи находится въ сочиненіи: *Bailly*, Traité de l'astronomie indienne et orientale. Paris, 1787. in-4. Бальи раздѣляетъ мнѣніе о глубокой древности индусскихъ наукъ. Сочиненіе это есть одно изъ первыхъ, написанныхъ по астрономіи индусовъ. Къ сожалѣнію въ своихъ выводахъ Бальи слишкомъ смѣлъ; объясненія данныя имъ различнымъ цикламъ индусской хронологіи ни на чемъ положительномъ не основаны. Астрономіей и математикой индусовъ также занимался извѣстный

нымъ вопросамъ они пришли вѣроятно при опредѣленіи времени начала эпохи когда земля и нѣкоторыя изъ свѣтилъ находились въ соединеніи. Извѣстно, что вопросъ объ опредѣленіи времени подобнаго соединенія по долготѣ приводится къ рѣшенію системы совмѣстныхъ неопредѣленныхъ уравненій *). Къ рѣшенію неопредѣленныхъ уравненій также приводятъ нѣкоторые изъ вопросовъ календаря **). Задачи эти приводятся къ нахожденію неизвѣстнаго цѣлаго числа, по даннымъ остаткамъ, полученнымъ отъ дѣленія этого числа на извѣстныя числа ***).

Мы уже выше сказали, что въ большей части случаевъ индусскіе математики съумѣли сдѣлаться чуждыми геометрическихъ представленій, при изслѣдованіи свойствъ чиселъ. Подобныя воззрѣнія на числа имѣлъ также Діофантъ и весьма вѣроятно, что благодаря этому, онъ достигъ такихъ результатовъ въ неопредѣленномъ анализѣ. Но Діофантъ стоитъ несравненно

Деламбръ въ своемъ сочиненіи: „*Delambre*, Histoire de l'astronomie ancienne. T. I—II. Paris. 1817. in-4. (см. во II-мъ томѣ отдѣлъ „Astronomie orientale", Chapitres II, III, V и VI; pag. 400—518, 538—556).

*) На подобное значеніе неопредѣленнаго анализа у индусовъ обращаетъ вниманіе Вепке въ интересномъ мемуарѣ: *Woepcke*, Mémoire sur la propagation des chiffres indiens. Paris. 1863. in-8. (pag. 68—70).

**) При каждой изъ священныхъ книгъ индусовъ—Ведъ, приложенъ особенный календарь *Iyotisha*, т. е. Астрономія, въ которомъ указаны правила какъ опредѣлять время различныхъ ведическихъ церемоній, при чемъ приняты во вниманіе солнечные и лунные годы. Календари эти представляютъ особенный интересъ, на нихъ обратилъ еще вниманіе Кольбрукъ, описавшій календарь, приложенный къ *Rig-Veda*, самой древней изъ четырехъ Ведъ. Описаніе одного изъ подобныхъ календарей находится въ статьѣ „*A. Weber*, Ueber den Veda-Kalender, genannt Iyotischam", помѣщенной въ Abhandlungen der Akademie der Wissenschafften zu Berlin за 1862 г. Объ этомъ календарѣ мы уже упоминали на стр. 325. Изъ содержанія этихъ календарей можно заключить, что въ древности у индусовъ въ употребленіи былъ лунный годъ, находящійся въ связи съ солнечнымъ годомъ, продолжительность котораго не опредѣлена. Луна во время своего обращенія проходила чрезъ 28 *nakshatras*, т. е. тѣ 28 частей неба, на которыя оно было раздѣлено индусами. Каждая изъ этихъ частей опредѣлялась извѣстной звѣздой—*yôgatâras*, положеніе которой было опредѣлено и извѣстно. Вопросъ о *nakshatras*-хъ занималъ многихъ ученыхъ, и въ томъ числѣ Вебера и Біо; послѣдній полагаетъ, что система эта была заимствована индусами у китайцевъ. Долгое время полагали что 28 nakshatras составляли *лунный зодіакъ* индусовъ и были ничто иное какъ особое дѣленіе эклиптики. Кольбрукъ также вначалѣ раздѣлялъ подобный ложный взглядъ на эту систему.

***) Одинъ изъ подобныхъ вопросовъ приведенъ въ сочиненіи *Hankel*, Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter. Leipzig. 1874. in-8. (pag. 196—199). Задача эта имѣетъ предметомъ опредѣленіе положенія, числа обращеній и т. п. свѣтила, на основаніи нѣкоторыхъ данныхъ, часть которыхъ утеряна. Вопросъ этотъ заимствованъ Ганкелемъ изъ XII-й главы Лилавати (§ 264). При рѣшеніи этого вопроса примѣняется методъ разсѣеванія.

ниже индусовъ, такъ какъ онъ ограничился раціональными числами, чего не сдѣлали индусскіе математики. Благодаря такому широкому обобщенію многія изъ предложеній X-й книги „Началъ“ Евклида, которыя представлялись древнимъ греческимъ геометрамъ въ довольно темной формѣ, являются у индусовъ какъ чисто алгебраическія выраженія. Изъ такихъ выраженій укажемъ на слѣдующія, находящіяся въ первой главѣ „Віаганиты“ Баскары:

$$\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{a + b \pm 2\sqrt{ab}}$$

или

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

Выраженія эти даны у индусовъ въ числахъ.

Исходя изъ подобныхъ воззрѣній индусскимъ математикамъ было легко приложить Алгебру къ геометрическимъ изслѣдованіямъ, что они и сдѣлали на самомъ дѣлѣ, при чемъ пріемы употребленные ими совершенно схожи съ употребляемыми въ настоящее время. Греческіе математики рѣшали также большую часть вопросовъ, рѣшенныхъ индусскими учеными алгебраически, но методъ ихъ былъ совершенно иной—геометрическій. Многіе изъ такихъ вопросовъ находятся въ „Началахъ“ и „Данныхъ“ Евклида. За то съ другой стороны, гдѣ только дѣло касалось чисто геометрическихъ изслѣдованій, тамъ греческимъ математикамъ безспорно принадлежитъ первое мѣсто, въ подтвержденіе чего достаточно указать на то, что о коническихъ сѣченіяхъ и о ихъ свойствахъ у индусскихъ математиковъ не существуетъ никакого понятія.

Различіе установленное греческими математиками, между числами и количествами, неимѣющее значенія съ научной точки зрѣнія, никогда не было извѣстно индусамъ. Хотя они не обошли трудностей, сопровождающихъ понятія о прерывномъ и непрерывномъ, но они съумѣли перейти отъ разсматриванія первыхъ къ разсматриванію послѣднихъ. Благодаря этому они сдѣлали въ математикѣ значительный шагъ впередъ, результаты котораго очевидны. Если понимать подъ Алгеброй примѣненіе ариѳметическихъ дѣйствій къ составнымъ величинамъ различнаго рода, будутъ-ли онѣ раціональныя или ирраціональныя числа, или же просто величины, то въ такомъ случаѣ можно считать индусскихъ ученыхъ творцами Алгебры*).

*) Въ Средніе Вѣка было распространено мнѣніе, что Алгебру европейскіе математики заимствовали у индусовъ. Такой взглядъ высказанъ также въ математической поэмѣ „De Vetula“, написанной, какъ полагаютъ, въ началѣ XIII в. Объ этомъ сочиненіи мы упоминали въ примѣчаніи на стр. 175—176.

Въ заключеніе этой главы скажемъ еще нѣсколько словъ объ Ариѳметикѣ и Тригонометріи индусовъ. Коснемся сначала Тригонометріи*).

Индусскіе математики, подобно греческимъ, пользовались кругомъ для измѣренія угловъ. Окружность они дѣлили на 360^0, а каждый градусъ на 60 минутъ. Подобное дѣленіе было ими заимствовано вѣроятно у халдеевъ, или же у грековъ. При такомъ дѣленіи окружность заключала 21600 минутъ. Извѣстно, что греческіе математики дѣлили также радіусъ на 60 равныхъ частей, изъ которыхъ каждая снова дѣлилась на 60 частей. Длину окружности они стремились выразить въ частяхъ радіуса, т. е. они *выпрямляли* окружность. Индусскіе же математики рѣшали тотъ же вопросъ въ обратномъ смыслѣ, т. е. они занимались *скривленіемъ* прямой линіи и опредѣляли число минутъ заключающихся въ скривленномъ радіусѣ**); иными словами они пытались выразить длину радіуса въ единицахъ длины окружности. Длину радіуса индусскіе математики полагали равной 3438 минутамъ. Выраженіе это было вѣроятно найдено вставляя въ формулу $2\pi r = 21600$ минутамъ вмѣсто π его значеніе $\pi = 3{,}1416$, которое, какъ мы замѣтили выше, было извѣстно еще Аріабгаттѣ. Дѣлая подстановку, находимъ:

$$r = \frac{21600}{6.2832} = 3437.7$$

которое весьма мало разниться отъ $r = 3438$. Кромѣ того кругъ дѣлился двумя взаимно-перпендикулярными діаметрами на четыре квадранта, по 90^0 въ каждомъ. Независимо отъ этого квадрантъ былъ раздѣленъ на 24 части, по $3^0 45' = 225'$ въ каждомъ. Индусскіе математики при вычисленіи угловъ пользовались не цѣлыми хордами, подобно греческимъ геометрамъ, а только полухордами.

Изъ тригонометрическихъ функцій были извѣстны индусскимъ математикамъ синусъ, синусъ версусъ и косинусъ. Хорду стягивающую дугу на-

Фиг. 10.

зывали *jyâ* или *jîva*, т. е. тетива лука. Половина хорды носила названіе

*) Тригонометріей индусовъ занимался также Вепке въ своей статье: „*Woepcke*, Sur le mot *kardaga* et sur une méthode indienne pour calculer les sinus“, которая помѣщена въ „Nouvelles Annales de Mathématiques“. T. XIII, 1854.

**) Канторъ выражаетъ это терминомъ: *Arcufication* der graden Linie.

jyârdha или *ardhajyâ*. Принимая BC за хорду, а BK за полухорду (фиг. 10) мы видимъ, что линія BK есть ничто иное какъ Sinus. Изъ другихъ тригонометрическихъ функцій были извѣстны еще Sin. vers, т. е. линія KA, которую они называли *стрѣла (utkramajyâ)* и Cosinus *(kotijyâ)*—OK.

Изъ соотношеній, существующихъ между тригонометрическими величинами, были извѣстны слѣдующія: называя чрезъ x уголъ BOA и примѣняя пиѳагорову теорему къ прямоугольному треугольнику BOK легко было найти выраженіе:

$$(\mathrm{Sin}\, x)^2+(\mathrm{Cos}\, x)^2=r^2=(3438)^2$$

Такъ какъ хорда дуги въ 60^0 равна радіусу круга или 3438 минутамъ, то ея половина очевидно была равна 1719 минутамъ, т. е. $\mathrm{Sin}\, 30^0=\frac{r}{2}=1719'$. Зная это легко можно было найти выраженіе для синуса половины угла, именно, примѣняя пиѳагорову теорему къ прямоугольному треугольнику KBA находимъ:

$$\left(2\,\mathrm{Sin}\frac{x}{2}\right)^2=(\mathrm{Sin}\, x)^2+(\mathrm{Sin.\, vers.}\, x)^2$$

но, замѣчая, что:

$$\mathrm{Sin.\, vers.}\, x=r-\mathrm{Cos}\, x$$

и

$$\mathrm{Sin}\, x^2+\mathrm{Cos}\, x^2=r^2$$

найдемъ:

$$\left(2\,\mathrm{Sin}\frac{x}{2}\right)^2=2r^2-2r.\mathrm{Cos}\, x$$

откуда:

$$\mathrm{Sin}\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{r}{2}(r-\mathrm{Cos}\, x)}=\sqrt{1719\,(3438-\mathrm{Cos}\, x)}$$

Весьма вѣроятно, что на основаніи вышеприведенныхъ соображеній, была составлена таблица синусовъ, находящаяся въ „Суріѣ Сидгантѣ“, о которой мы имѣли уже случай говорить (см. стр. 18). Изъ приведенной формулы легко можно найти:

$$\mathrm{Sin}\, 15^0=890'$$

$$\mathrm{Sin}\, 7^0\, 30'=449'$$

$$\mathrm{Sin}\, 3^0\, 45'=225'$$

замѣтивъ, что при послѣдовательномъ раздѣленіи дуги пополамъ синусы все болѣе и болѣе приближаются къ дугѣ, и наконецъ при $3^0 45'$ синусъ совпадаетъ съ самой дугой и равенъ самъ $225'$. Такимъ образомъ мы видимъ, что ограничиваясь приближеніемъ точно до $1'$ можно принимать, что при углѣ $x<225'$ существуетъ всегда равенство $\mathrm{Sin}\, x=x$. Изъ вышесказаннаго

ясно, почему дуга въ $3^0 45'$ легла въ основаніи таблицы синусовъ „Суріи Сидганты“. Дуга эта составляетъ 96-ю часть окружности и носила особое названіе *kramajya*, т. е. *прямой синусъ* *); этимъ же терминомъ называли и самый синусъ дуги въ $225'$. Дуга въ $3^0 45'$ была принята за *единицу мѣры* окружности, какъ это видно изъ приведенной выше таблицы „Суріи-Сидганты“, которая составлена для угловъ отъ $3^0 45'$ до 90^0 и заключаетъ 24 послѣдовательныхъ значенія угловъ возрастающихъ отъ $3^0 45'$ до $3^0 45'$ **).

Справедливо-ли такое воззрѣніе на происхожденіе таблицъ синусовъ индусовъ нельзя сказать утвердительно, за недостаткомъ указаній по этому предмету. Весьма можетъ быть, что имѣло мѣсто и противное, т. е. что первоначально было принято, что $\mathrm{Sin}\,\frac{360^0}{96}=\frac{360^0}{96}$, а затѣмъ уже были отысканы и другіе синусы. При этомъ считаемъ нелишнимъ замѣтить, что исходя изъ подобныхъ же соображеній, Архимедомъ было найдено соотношеніе между окружностью и діаметромъ, въ видѣ $\pi=\frac{22}{7}$, принявъ, что площадь 96-ти-угольника совпадаетъ съ площадью описаннаго около него круга.

По мнѣнію Арнета, много занимавшагося вопросомъ о математикѣ

*) Термины *cardadja*, *cardagia*, *cardaga* встрѣчаются весьма часто въ различныхъ сочиненіяхъ, написанныхъ по латыни въ Средніе Вѣка; термины эти употребляются въ смыслѣ *синуса* и суть ничто иное какъ видоизмѣненное санскритское *kramajya*.

**) Таблица синусовъ и ихъ первыхъ разностей, находящаяся въ „Суріѣ-Сидгантѣ“, заимствованная потомъ Аріабгаттой изъ этого сочиненія и включенная имъ въ X-е правило первой главы „Аріабгаттіама“ имѣетъ слѣдующій составъ:

Дуги	Синусы	Разности	Дуги	Синусы	Разности	Дуги	Синусы	Разности
0	0	225′	8	1719′	191′	16	2978′	106′
1	225′	224′	9	1910′	183′	17	3084′	93′
2	449′	222′	10	2093′	174′	18	3177′	79′
3	671′	219′	11	2267′	164′	19	3256′	65′
4	890′	215′	12	2431′	154′	20	3321′	51′
5	1105′	210′	13	2585′	143′	21	3372′	37′
6	1315′	205′	14	2728′	131′	22	3409′	22′
7	1520′	199′	15	2859′	119′	23	3431′	7′
8	1719′		16	2978′		24	3438′	

индусовъ, таблицы синусовъ возникли слѣдующимъ образомъ. Зная соотношенія между частями треугольника, выражаемыя формулами:

$$\mathrm{Sin}^2 x + \mathrm{Cos}^2 x = 1 \qquad 1 - \mathrm{Cos}\, x = \mathrm{Sin\,vers}\, x$$

$$\mathrm{Sin}(90^0 - x) = \mathrm{Cos}\, x \qquad \mathrm{Sin\,vers}\, 2x = 2\mathrm{Sin}^2 x$$

первоначально были найдены $\mathrm{Sin}\,30^0 = \frac{1}{2}$ и $\mathrm{Sin}\,45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, а затѣмъ синусы 15^0, $7^0 30'$, $3^0 45'$, $22^0 30'$, $11^0 15'$. Найдя эти величины вычислялись синусы дополнительныхъ угловъ 60^0, 75^0, $82^0 30'$, $86^0 15'$, $67^0 30'$, $78^0 45'$. Имѣя эти величины послѣдовательнымъ дѣленіемъ пополамъ находили синусы $37^0 30'$, $41^0 15'$, $33^0 45'$, коихъ дополненіями будутъ $52^0 30'$, $48^0 45'$, $56^0 15'$. Дѣля синусъ $52^0 30'$ пополамъ находили синусъ $26^0 15'$, а затѣмъ синусъ $63^0 45'$; дѣля пополамъ синусъ $37^0 30'$ находили синусъ $18^0 45'$ и синусъ дополнительнаго угла $71^0 15'$. Такимъ образомъ возникла таблица синусовъ, въ которой углы возрастаютъ отъ $3^0 45'$ до $3^0 45'$. Предѣльными значеніями синусовъ въ этой таблицѣ были $\mathrm{Sin}\,3^0 45' = 225'$ и $\mathrm{Sin}\,90^0 = 3438'$.

Въ указанной нами таблицѣ „Суріи-Сидганты“ синусы выражены въ видѣ трехзначныхъ или четырехзначныхъ цѣлыхъ чиселъ. Имѣя подобную таблицу индусскими математиками, по мнѣнію Ганкеля, была найдена эмпирически формула:

$$\mathrm{Sin}\, c - \mathrm{Sin}\, b = (\mathrm{Sin}\, b - \mathrm{Sin}\, a) - \frac{\mathrm{Sin}\, b}{225}$$

въ которой a, b и c представляютъ три послѣдовательно возрастающихъ величины, разность d между которыми равна $225'$. Выраженіе это въ примѣненіи къ настоящему случаю будетъ:

$$\mathrm{Sin}\,[(n+1).225'] - \mathrm{Sin}\,(n.225') = \mathrm{Sin}\,(n.225') - \mathrm{Sin}\,[(n-1).225'] - \frac{\mathrm{Sin}\,(n.225')}{225}$$

Зная подобную интерполяціонную формулу индусы могли всегда составить выше приведенную таблицу синусовъ, въ случаѣ если-бы она затерялась. Въ дѣйствительности такая интерполяціонная формула существуетъ, съ тою только разницею, что при $\mathrm{Sin}\, b$ множитель $\frac{1}{225}$ замѣненъ множителемъ $2\,\mathrm{Sin\,vers}\, d = \frac{1}{233.5}$, который впрочемъ оказываетъ весьма незначительное вліяніи на составъ таблицы, въ указанныхъ выше предѣлахъ.

Были также попытки составить болѣе точныя таблицы. Баскара выражаетъ синусы и косинусы въ частяхъ радіуса круга, именно онъ находитъ:

$$\mathrm{Sin}\,3^0 45' = \frac{100}{1529}, \qquad \mathrm{Cos}\,3^0 45' = \frac{466}{467}$$

$$\mathrm{Sin}\,1^0 = \frac{10}{573}, \qquad \mathrm{Cos}\,1^0 = \frac{6568}{6569}$$

Числа полученныя въ верхней строкѣ рознятся немного болѣе одной десятимилліонной части радіуса отъ истинныхъ значеній. Числа второй строки рознятся на нѣсколько десятимилліонныхъ отъ настоящихъ величинъ. Результаты, полученные Баскарой, въ значительной степени превосходятъ значенія, вычисленныя Птоломеемъ въ „Альмагестѣ“. На это слѣдуетъ обратить особенное вниманіе*). Таблица синусовъ составленная Баскарой дана для угловъ возрастающихъ отъ 1^0 до 1^0. Таблицу эту Баскара строитъ при помощи формулы:

$$\mathrm{Sin}\,(x \pm y) = \mathrm{Sin}\, x.\mathrm{Cos}\, y \pm \mathrm{Cos}\, x.\mathrm{Sin}\, y$$

По предположеніямъ Кантора выраженіе, представляющее зависимость между: хордою, окружностью, дугою и діаметромъ, о которомъ мы упоминали выше (см. стр. 43) находиться въ зависимости отъ таблицы синусовъ, данной Баскарой.

При астрономическихъ вычисленіяхъ индусы пользовались также иногда сферическими треугольниками, но только прямоугольными. Изъ формулъ Сферической Тригонометріи имъ было извѣстно соотношеніе:

$$\mathrm{Sin}\, h\,\mathrm{Sin}\, d = \mathrm{Sin}\, a$$

Въ большей части случаевъ сферическіе треугольники индусы старались замѣнить плоскими, которые они всегда разбивали на прямоугольные. Другихъ выраженій, представляющихъ зависимость между частями сферическаго треугольника, на сколько извѣстно въ настоящее время, индусы не знали.

---

*) Отъ индусовъ таблицы синусовъ перешли къ арабамъ, которые многія изъ своихъ познаній въ математическихъ наукахъ заимствовали изъ индусскихъ сочиненій. Одинъ изъ арабскихъ писателей Ибнъ-Аладами (Ibn-Aladami, около 900 г.) въ своемъ сочиненіи „Ожерелье изъ жемчуга“ говоритъ, что къ халифу Альмансору (около 773 г.) пришелъ изъ Индостана ученый, весьма свѣдущій въ вычисленіяхъ, извѣстныхъ подъ именемъ *Сидгинтъ*, относящихся къ движенію свѣтилъ. Лицо это было знакомо съ методами вычисленія уравненій, основанными на *cardadja*, т. е. синусахъ, вычисленныхъ отъ полу-градуса до полу-градуса. Также были ему извѣстны пріемы для вычисленія солнечныхъ и лунныхъ затмѣній и многое другое. Все вышеупомянутое было изложено въ сочиненіи, которое по словамъ индусскаго ученаго, онъ заимствовалъ изъ сочиненія о синусахъ, носящаго названіе одного изъ царей. Есть основаніе предполагать, что сочиненіе о которомъ упоминаетъ арабскій ученый есть ничто иное какъ сочиненіе Брамагупты „Брама-Спута-Сидганта“. Кольбрукъ первый высказалъ предположеніе, что астрономическая система, извѣстная у арабовъ подъ именемъ „Сидгинты“, есть система, изложенная въ сочиненіи Брамагупты. Такое мнѣніе вполнѣ вѣроятно, такъ какъ Альбируни въ XIV-й главѣ своего сочиненія объ Индостанѣ даетъ подробное содержаніе всѣхъ главъ „Брама-Спути-Сидганти“.

Отдѣльныхъ сочиненій и главъ тригонометрическаго содержанія въ индусскихъ сочиненіяхъ нѣтъ, все извѣстное до настоящаго времени по этому вопросу заимствовано изъ извѣстныхъ намъ сочиненій астрономическаго и математическаго содержанія.

Перейдемъ теперь къ Ариѳметикѣ индусовъ *). У индусскихъ математиковъ существовало нѣсколько способовъ изображать числа **). Изъ всѣхъ си-

---

*) Изобрѣтеніе, такъ называемыхъ, арабскихъ цифръ многіе писатели приписываютъ индусамъ. Мы уже выше (см. стр. 199) привели мнѣніе Фибоначчи по этому вопросу. Одно изъ самыхъ раннихъ указаній на цифры находится въ одной еврейской рукописи, написанной около 950 г. въ сѣверной Африкѣ. Рукопись эта есть комментарій Абу-Сала-бенъ-Тамима (Abou-Sahl-ben-Tamim) на извѣстное сочиненіе кабалистическаго содержанія, написанное Sepher Jecira. Рукопись эта хранится въ настоящее время въ одной изъ парижскихъ библіотекъ. Въ этой рукописи говорится, что „индусы нашли девять знаковъ для изображенія единицъ".

Болѣе подробныя указанія находятся въ сочиненіи византійскаго монаха *Максима Планудa*, о которомъ мы уже говорили (см. стр. 165). Въ своемъ сочиненіи „Счетъ марками по методу индусовъ (ψηφοφορία κατ' Ἰνδούς)" Планудъ говоритъ: „Такъ какъ число заключаетъ безконечное, познаніе же безконечнаго невозможно, то первокласные мыслители между астрономами нашли методъ, при помощи котораго можно числа при вычисленіяхъ представить болѣе наглядно и точно. Такихъ знаковъ существуетъ только девять и они слѣдующіе: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Къ нимъ прибавляютъ еще одинъ знакъ, который называютъ *tziphra* и который у индусовъ представляетъ отсутствіе чего либо. Поименованные девять знаковъ получили начало у индусовъ. Знакъ tziphra изображаютъ слѣдующимъ образомъ ○". Знаки цифръ, приведенные въ сочиненіи Плануда весьма мало напоминаютъ наши цифры; сходство представляютъ только знаки 1, 9 и 0.

Изъ приведенныхъ словъ Максима Плануда можно заключить, что онъ первый познакомилъ византійцевъ съ такъ называемыми арабскими цифрами. Въ Западной Европѣ онѣ были извѣстны почти 200 лѣтъ ранѣе и были окончательно введены такъ называемыми альгоритмистами (см. стр. 198) въ Испаніи, Франціи, Англіи и Германіи, которые уже въ началѣ XIII в. вытѣснили сторонниковъ абакуса—абасистовъ.

Сочиненіе Максима Плануда было издано въ греческомъ текстѣ подъ заглавіемъ „*Planudes*. Rechenbuch, Griech. n. d. HS. hrsg. v. C. J. Gerhardt. Halle. 1865. in-4". Нѣмецкій переводъ былъ изданъ недавно подъ заглавіемъ: „*Planudes*, Rechenbuch. Uebers. v. H. Wäschke. Halle. 1878. in-8".

**) Отличительная особенность различныхъ индусскихъ сочиненій, не только космогоническаго, но также философскаго и религіознаго содержанія, та, что гдѣ только возможно авторы ихъ вводятъ громадныя числа, которыя на европейскаго читателя производятъ подавляющее впечатлѣніе по своей необъятности. Существуютъ цѣлыя системы счисленій, гдѣ числа дѣлятся на классы, которыми выражаются единицы высшаго наименованія. Изъ такихъ системъ укажемъ на систему, находящуюся въ Магабгаратѣ, гдѣ она примѣняется при перечисленіи богатствъ Joudhichthira. Также интересна система, примѣненная въ Рамаянѣ, при перечисленіи числа обезьянъ, составляющихъ арміи Сугрива. Изъ подобныхъ системъ, находящихся въ сочиненіяхъ религіознаго содержанія особенное вниманіе обращаютъ на

стемъ, особеннаго вниманія заслуживаетъ *символическая* система, въ которой числа обязаны своимъ наименованіемъ названію того предмета, котораго количество онѣ выражаютъ. Всего лучше пояснить это на примѣрахъ. Такъ напр число 1 обозначали названіями предметовъ встрѣчающихся только въ единственномъ числѣ, какъ напр.: *солнце, луна, начало, Брама, форма.* Число 2 выражали названіями: *глаза, руки, уши, ноги.* Число 4—словами *Веды* (такъ какъ существуетъ четыре священныя книги Ведъ), *океаны, страны свѣта* и т. д. Число 32—названіемъ *зубы* и т. д. Такъ какъ при такомъ способѣ выражать числа существовало множество синонимовъ, то для выраженія различныхъ чиселъ существовало множество комбинацій. При такомъ способѣ выражать числа, можно бы сравнительно легко обле-

---

себя числа, встрѣчающіяся въ одной изъ священныхъ книгъ буддистовъ „*Lalitavistara*", въ которой приведена біографія одного святаго. Въ этомъ сочиненіи говориться о сотняхъ тысячъ милліоновъ святыхъ; украшенія трона Буды составляютъ сотни тысячъ предметовъ; сотни тысячъ божествъ и сто тысячъ милліоновъ Бодгисатвасовъ восхваляютъ тронъ Буды, который есть произведеніе заслугъ, скопившихся въ теченіи ста тысячъ милліоновъ *kalpas* (kalpa = 4 320 000 000 лѣтъ); большой лотосъ, который разцвѣтаетъ въ ночь зачатія Буды, покрываетъ собою пространство въ 68 милліоновъ yôdjanas). Въ этомъ же сочиненіи говориться о числахъ, выраженныхъ единицей сопровождаемой 421 нулемъ. Основной единицей высшаго наименованія этой системы есть *tallakchana*, т. е. единица, сопровождаемая 53 нулями.

Въ „Лалитавистарѣ" изложена слѣдующая система мѣръ протяженій, которая положительно напоминаетъ пріемъ, употребленный Архимедомъ, въ сочиненіи „О числѣ песчинокъ", для выраженія большихъ чиселъ. Эта интересная система состоитъ въ слѣдующемъ:

1 весьма малая пылинка	= 7 пылинкамъ первоначальныхъ атомовъ.
1 малая пылинка	= 7 весьма малымъ пылинкамъ.
1 пылинка поднятая вѣтромъ	= 7 пылинкамъ.
1 пылинка зайца (поднятая)	= 7 пылинкамъ, поднятымъ вѣтромъ.
1 пылинка барана	= 7 пылинкамъ зайца.
1 пылинка быка	= 7 пылинкамъ барана.
1 зерно мака	= 7 пылинкамъ быка.
1 зерно горчицы	= 7 зернамъ мака.
1 зерно ячменя	= 7 зернамъ горчицы.
1 суставъ пальца	= 7 зернамъ ячменя.
1 пядень	= 12 суставамъ.
1 локоть	= 4 пядямъ.
1 дуга	= 4 локтямъ.
1 krôça страны Могадга	= 1000 дугамъ.
1 yôdjana	= 4 krôças.

По мнѣнію Вепке, Архимедъ заимствовалъ свою систему изъ вышеупомянутаго сочиненія. Справедливо-ли такое мнѣніе это вопросъ спорный, но во всякомъ случаѣ нельзя необратить вниманія на то обстоятельство что „Лалитавистара" была написана въ III в. до Р. Х., т. е. именно въ то время когда жилъ Архимедъ (287—212 до Р. Х.)

кать числа и дѣйствія надъ ними въ форму самыхъ замысловатыхъ стиховъ со всевозможными остроумными изрѣченіями. Еще въ настоящее время составленіе подобныхъ изрѣченій, по словамъ Гумбольда, весьма распространено на островѣ Явѣ. Какое множество синонимовъ существовало для выраженія одного и того же числа, можно видѣть изъ словъ Брокгауза, который говоритъ, что для выраженія чиселъ 1 и 2, существовало болѣе 300 именъ, для каждаго *).

Подобная система выраженія чиселъ находиться въ древнѣйшемъ астрономическомъ сочиненіи индусовъ „Сурiѣ-Сидгантѣ", изъ чего можно заключить, что она весьма древняя. Система эта имѣла важное значеніе для индусскихъ ученыхъ, которые всѣ свои сочиненія излагали въ стихотворной формѣ. Въ такой формѣ написаны сочиненія Аріабгатты, Брамагупты и др. математиковъ. Баскара-же ограничивается тѣмъ, что въ стихотворной формѣ излагаетъ только вопросы и правила; поясненія онъ дѣлаетъ въ прозѣ, при чемъ все таки облекаетъ свои мысли въ поэтическія представленія. Излагая содержаніе сочиненій Брамагупты и Баскары мы привели нѣкоторые изъ примѣровъ, рѣшенныхъ въ этихъ сочиненіяхъ и обратили вниманіе на поэтическую ихъ форму. Подобный способъ изложенія и представленія былъ вполнѣ въ духѣ индусовъ, у которыхъ поэзія достигла высокой степени своего развитія **). Предлагать задачи въ стихотворной формѣ отъ индусовъ вѣроятно перешло на Западъ. Съ вѣроятностью можно предположить, что греческія эпиграммы, встрѣчающіяся въ „Ариѳметикахъ" Діофанта, были заимствованы греками у индусовъ. Впослѣдствіи времени, форма эта стала весьма распространенною на всемъ Западѣ, въ особенности она встрѣчается въ старыхъ германскихъ задачникахъ XVI, XVII и XVIII столѣтій; но только нѣмцы поэтическихъ лотосовъ индусовъ вездѣ замѣнили трактирны-

*) См. Berichte der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschafften zu Leipzig. Philolog. Historich. Klasse IV. 1852.

**) Много интересныхъ данныхъ, относящихся къ индусской наукѣ вообще можно найти въ интересномъ мемуарѣ *Рено*: Mémoire géographique, historique et scientifique sur l'Inde, antérieurement au milieu du XI-e siècle de l'ère chrétienne, d'après les écrivains arabes, persans et chinois; par *M. Reinaud*. Сочиненіе это помѣщено: въ Mémoires de l'Institut National de France. Académie des Inscriptions et Belles-lettres, T. XVIII, Paris, 1849. in-4.

Въ послѣднее время стали много заниматься санскритской литературой, появились даже цѣлые многотомные сборники, какъ напр. „Indische Studien", издаваемыя *Weber*'омъ. Въ особенности много обязана своимъ развитіемъ санскритская литература Азіатскому Обществу въ Калькуттѣ, основанному въ 1784 г. Однимъ изъ первыхъ членовъ этого общества былъ извѣстный *Джонсъ* (Sir William Jones), посвятившій себя изученію санскритской литературы. Занимаясь въ школѣ браминовъ въ Бенаресѣ, онъ познакомился съ извѣстной поэмой Калидасы „Сакунтала", которую онъ перевелъ сначала на латинскій языкъ, а потомъ и на англійскій.

ми счетами, за выпитое вино и пиво. Изъ Германіи стихотворная форма при изложеніи математическихъ сочиненій перешла также въ Россію. Извѣстно нѣсколько математическихъ сочиненій, составленныхъ въ прошломъ столѣтіи, которыя написаны стихами, въ томъ числѣ упомянемъ извѣстную „Ариѳметику" Магницкаго, въ которой всѣ правила изложены стихами.

Изъ другихъ системъ изображенія чиселъ укажемъ еще систему, примѣняемую Аріабгаттой, который всѣ числа отъ 1 до 25 выражаетъ первыми 25-ю согласными санскритскаго альфавита; остальныя 8 согласныхъ служатъ для выраженія 30, 40, ... 90, 100. Для выраженія чиселъ большихъ 100 служили гласныя, которыя приставлялись къ соотвѣтствующей согласной, смотря по ея значенію. Гласныя эти выражали первыя девять степеней числа 10. Изслѣдованія Роде относительно системы, принятой Аріабгаттой, показали, что Аріабгаттѣ была извѣстна *ариѳметика положенія*, т. е. что наименованіе числа зависѣло отъ мѣста, которое оно занимаетъ въ ряду другихъ чиселъ. Самъ Аріабгатта часто говоритъ о *мѣстѣ (sthâna)* числа. Также извѣстенъ былъ ему *нуль (kha)* *). Подобная система обозначенія чиселъ, какъ у Аріабгатты, встрѣчается еще въ настоящее время въ Деканѣ.

Также занимались много индусскіе математики магическими квадратами, къ сожалѣнію нѣтъ положительныхъ указаній на изслѣдованія ихъ въ этой области **). Какъ на одно изъ приложеній магическихъ квадратовъ нѣкоторые писатели указываютъ на игру въ шахматы ***).

*) Также существовало другое названіе для нуля, именно *пустота—сѣнуа*. Въ „Сурiѣ-Сидгантѣ" нуль выражаютъ терминами: *атмосфера, воздухъ, пространство—сунта, ciyat* и *ambara*.

**) Относительно происхожденія магическихъ квадратовъ нѣтъ положительныхъ указаній, хотя нѣкоторые ученые говорятъ, что свое начало они получили въ Индостанѣ. Справедливо-ли это нельзя сказать утвердительно, но во всякомъ случаѣ извѣстно, что индусы много и съ успѣхомъ занимались магическими квадратами, на что обратилъ вниманіе еще извѣстный путешественникъ Лалуберъ въ своемъ сочиненіи: *La Loubère*, Du Royaume de Siam. T. II. Amsterdam. 1691. Вопросъ о магическихъ квадратахъ исторически разобранъ въ сочиненіи: *S. Günther*, Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der Mathematischen Wissenschaften. Leipzig. 1876. in-8, въ статьѣ „Historische Studien über die magischen Quadrate".

Въ концѣ XVII в. Лагиромъ была отыскана въ одной изъ парижскихъ библіотекъ греческая рукопись, въ которой трактуется объ магическихъ квадратахъ. Авторъ этой рукописи византійскій грекъ *Мосхопулосъ* (Moschopulus). Время когда онъ жилъ неизвѣстно, полагаютъ что въ XV в. Содержаніемъ этой рукописи занимался также Гюнтеръ, издавшій ея текстъ въ своей статьѣ.

***) Относительно игры въ шахматы извѣстно, что она была изобрѣтена еще въ глубокой древности, такъ какъ о ней говорится въ Рамаянѣ. Индусы игру эту называли tchatur-

Не входя въ дальнѣйшее разсмотрѣніе ариѳметическихъ методовъ индусовъ упомянемъ только, что имъ были извѣстны четыре основныя дѣйствія надъ цѣлыми и дробными числами, а также извлеченіе квадратныхъ и кубическихъ корней, которые они производили съ большимъ искусствомъ и умѣніемъ. Методы ихъ мало чѣмъ разнятся отъ употребляемыхъ нынѣ. Мы на это уже указали говоря о сочиненіяхъ Баскары. Также основательно были знакомы индусскіе математики съ цѣлымъ рядомъ вопросовъ практической ариѳметики, каковы: правило смѣшенія, правило пробы, правила товарищества, правила процентовъ и правила трехъ, пяти и т. д. членовъ, или тройныя правила.

Изъ всего выше сказаннаго можно заключить, что индусы достигли высокаго развитія въ методахъ вычисленія по приближенію, хотя впрочемъ иногда методы ихъ сходны съ методами нѣкоторыхъ греческихъ математиковъ, какъ напримѣръ Герона Старшаго. Геометрія индусовъ заслуживаетъ также вниманія, ихъ методы такъ своеобразны и отличны отъ методовъ греческихъ, что приписывать вліяніе греческой Геометріи на развитіе этой науки у индусовъ было бы совершенно несправедливымъ. Трудно предполагать, чтобы сочиненія Діофанта проникли въ Индію, тѣмъ болѣе, что такое распространенное сочиненіе какъ „Начала“ Евклида, стало извѣстно индусамъ только въ началѣ XVIII столѣтія.

Безъ сомнѣнія греческіе математики могли имѣть вліяніе на развитіе этой науки у индусовъ, что утверждаетъ Веберъ въ своихъ „Академическихъ лекціяхъ по исторіи Индіи“, читанныхъ имъ въ Берлинѣ въ 1852 году. На сколько велико было вліяніе греческой науки на развитіе математи-

---

anga, т. е. четыре арміи. Названіе это вѣроятно дано было потому что индусскія арміи состояли изъ четырехъ главныхъ родовъ войскъ, именно: колесницъ, слоновъ, пѣхоты и кавалеріи. Впослѣдствіи съ игрой этой познакомились арабы, у которыхъ она называлась schatrandj. Отъ арабовъ она перешла къ европейцамъ.

Относительно изобрѣтенія игры въ шахматы у индусовъ существуетъ слѣдующее преданіе: за 400 л. до Р. Х. жилъ царь Schechram, для котораго браминъ Sissa изобрѣлъ игру въ шахматы. Игра эта очень понравилась царю, который спросилъ изобрѣтателя, что онъ желаетъ получить въ награду за свою выдумку. Браминъ отвѣтилъ: я хочу столько зеренъ пшеницы, сколько получиться если положивъ на первую клѣтку шахматной доски два зерна, постоянно будемъ удваивать это число, иными словами онъ пожелалъ получить $2+2^2+2^3+\ldots+2^{64}$ зеренъ. Царь сначала согласился, но вскорѣ увидѣлъ, что требованіе брамина неисполнимо. Число зеренъ полученное такимъ образомъ равняется 18000000000000000000 или же это составляетъ 15 милліоновъ кубич. футовъ пшеницы.

У Римлянъ также существовала игра, напоминающая шахматы это—ludus latronum. Игру эту они заимствовали въ Азіи во время своихъ походовъ. Съ игрой этой были знакомы Китайцы. Извѣстно, что въ эту игру играли Киръ, Тамерланъ и др.

ческихъ наукъ индусовъ и время когда началось это вліяніе, достовѣрно неизвѣстно; нужно полагать не ранѣе похода въ Индію Александра Великаго. Во время процвѣтанія Индійско-Греческаго государства, продолжавшагося до I в. до Р. Х., это вліяніе не могло быть сильно, такъ какъ состояніе Астрономіи у грековъ было самое ничтожное. Гораздо большее вліяніе стали имѣть греки на индусовъ во время господства римлянъ; въ это время торговыя сношенія между Индіей и Римской имперіей были очень развиты. Ежегодно греческіе и римскіе купцы посѣщали не только прибрежные, но и внутренніе города Индостана. Индійскіе купцы имѣли постоянное мѣстопребываніе въ Александріи. Въ интересахъ торговли индусскіе раджи посылали посольства римскимъ императорамъ, изъ этихъ посольствъ намъ болѣе извѣстны посольства къ Августу, Клавдію, Трояну, Антонину Пію и Юліану. Къ этому времени необходимо отнести и вліяніе греческой науки на науку браминовъ, и дѣйствительно самый древній изъ индусскихъ астрономовъ относится къ V столѣтію по Р. Х. Нѣкоторыя философскія и теологическія ученія гностиковъ, манихеевъ и неоплатониковъ носятъ чисто индусскій характеръ.

Нѣкоторые ученые, въ томъ числѣ *Шлегель (Schlegel)* и *Жаколіотъ (Jacolliot)*, указываютъ на памятники, скрытые въ пагодахъ, которымъ по 13000 и 17000 лѣтъ, но это все догадки и предположенія. Дѣлать какія либо заключенія относительно древности какихъ-бы то нибыло памятниковъ весьма трудно, въ особенности въ Индіи, а самые свѣдущіе изъ членовъ Азіатскаго Общества въ Калькуттѣ заявили, что они могутъ только приблизительно указать время происхожденія нѣкоторыхъ сочиненій и что они могутъ ошибаться на 1000 лѣтъ. Памятники же, заслуживающіе довѣрія, относятся не ранѣе какъ къ V столѣтію по Р. Х.

Пользоваться письменными памятниками индусовъ необходимо съ величайшею осторожностью, въ противномъ случаѣ легко сдѣлаться жертвою хитрыхъ пандитовъ (индусскіе ученые), какъ это случилось съ знаменитымъ Кольбрукомъ и другими учеными, сдѣлавшимися жертвами своего довѣрія. Пандиты, почерпнутыя ими свѣдѣнія у Кольбрука, перекладывали на санскритскій языкъ самыми своеобразными стихами и потомъ выдавали это тому же Кольбруку за сочиненія своихъ древнихъ писателей. Уже извѣстный арабскій математикъ XI столѣтія Альбируни сообщаетъ, что брамины надували его самымъ безсовѣстнымъ образомъ: познанія пріобрѣтенныя отъ него они перекладывали на стихи (*slokas*) и потомъ выдавали за свои собственныя идеи. Къ этому же времени относятъ и основаніе ученой Академіи, на подобіе Академіи основанной Аль-Мамуномъ, однимъ изъ индусскихъ князей, но члены этой Академіи занимались только надувательствомъ, и она скоро должна была прекратить свою дѣятельность.

Намъ, изучавшимъ Геометрію по методу изложенія грековъ, пріученнымъ къ строго-логической послѣдовательности, привыкшимъ относиться съ глубокимъ уваженіемъ къ классической литературѣ древнихъ грековъ, кажется что эта форма изложенія есть единственно возможная и научная, и мы не замѣчаемъ какъ не только вся наша нынѣшняя Ариѳметика и Алгебра, но и вся наша новѣйшая математика по формѣ и по своему духу рознятся отъ формы и духа Геометріи древнихъ грековъ. Читатель, прочитавши со вниманіемъ изложенное о наукѣ индусовъ, увидитъ какъ близокъ духъ нынѣшней математической науки къ духу науки древнихъ индусовъ. Сказаннаго достаточно, чтобы видѣть на сколько важны математическія сочиненія индусовъ въ историческомъ отношеніи.

Въ заключеніе укажемъ на характеристическія особенности, отличающія индусскія математическія науки. Прежде всего бросается въ глаза наглядность, играющая самую важную роль въ развитіи Геометріи, пріемъ этотъ существенно отличенъ отъ метода построеній, принятаго греками, для доказательства предложеній, и сводимаго ими къ первоначальнымъ основнымъ понятіямъ. Оба метода имѣютъ свои недостатки и преимущества одинъ передъ другимъ; подобно тому какъ методъ Евклида сдѣлался свойственнымъ не одной только математикѣ древнихъ грековъ, точно также и методъ созерцательный, если можно такъ выразиться, браминовъ отразился не на одной только Геометріи индусовъ. Метафизика, Космологія и Теологія древнихъ индусовъ произошли не изъ дѣятельности мышленія, подобно философіи грековъ, которая данное представленіе разлагала на части, сводимыя къ начальнымъ понятіямъ и собравъ которыя въ логическую и систематическую связь, старались доказать извѣстную истину. Методъ же индусовъ есть методъ чисто созерцательный, оглубленіе въ одну мысль, погруженіе въ высшія идеи, при которомъ духъ человѣка, отвлекаясь отъ всего окружающаго его міра, всѣ мысли исходящія изъ этого созерцанія, въ ихъ совокупности, старается сосредоточить на одной идеѣ. Можно указать, какъ примѣръ того, что методъ геометрическій, въ совокупности приложенія, связанъ невидимыми нитями, на то, что германскій философъ Шопенгауеръ, наиболѣе склонный къ метафизикѣ древнихъ браминовъ, былъ одинъ изъ первыхъ, возставшихъ противъ метода Евклидовскаго, и, не зная метода индусовъ, предложилъ методъ, согласный съ послѣднимъ и основанный на развитіи нагляднаго представленія.

Многочисленная, хорошо обставленная, каста браминовъ, заключала въ себѣ значительное число геніальныхъ, исполненныхъ талантовъ и жаждущихъ познаній людей, которые считали своимъ назначеніемъ постоянно наблюдать природу и человѣка, полагая основу всего бытія въ созерцаніи божественныхъ началъ и видя въ этомъ способъ улучшить и расширить

матеріальную и духовную жизнь человѣка. Исполненныя широты взгляда, но часто фантастическія воззрѣнія древнихъ индусскихъ философовъ, хотя всегда глубоко и много обдуманныя, слишкомъ извѣстны, чтобы о нихъ распространяться здѣсь. Но замѣтимъ, что одинъ изъ новѣйшихъ философовъ Германіи, думалъ найти правдивый и надлежащій отвѣтъ на всѣ вопросы человѣческой жизни и разрѣшеніе задачи о сущности всего бытія и небытія въ индусскихъ воззрѣніяхъ на Нирвану (*Nirwana*).

Не только въ философіи, но и во всѣхъ другихъ наукахъ, индусскіе ученые слѣдуютъ направленію совершенно отличному отъ направленія грековъ, и образы ихъ мышленія не сходны; они меньше обращаютъ вниманія на начало, чѣмъ на слѣдствіе, меньше на причину, чѣмъ на способъ; они больше имѣютъ дѣло съ идеями и представленіями, чѣмъ съ понятіями. Чрезъ это они многое теряютъ въ правильности и точности, за то выигриваютъ въ глубинѣ и ширинѣ взглядовъ; но мы почти всегда замѣчаемъ склонность, что эта глубина взгляда переходитъ въ неосновательность, ширина—въ нѣчто чрезвычайное, возрастающія до фантастическаго. Не даромъ Гегель назвалъ „безмѣрною" природу индусовъ; это не противорѣчитъ сказанному выше, если въ нѣкоторыхъ отрасляхъ мышленія, чуждой фантазіи, проявляется глубокомысленный, вполнѣ трезвый умъ.

Направленіе, которому слѣдовали индусы въ наукахъ всего лучше отразилось въ ихъ Грамматикѣ. Изъ всѣхъ научныхъ произведеній древнихъ индусовъ, наиболѣе обратила на себя вниманіе всѣхъ ихъ Грамматика. Грамматика древнихъ грековъ состояла изъ строго-логическаго и строго-правильнаго синтаксиса, которому подчинялись философскіе опредѣленія языка. Индусы же напротивъ обратили свои усилія на чисто форменную, этимологическую сторону языка и съ необыкновеннымъ стараніемъ и непостижимымъ для насъ трудомъ наблюденія эмпирически создали правила этой Грамматики; достоинство этой Грамматики, можно видить, изъ слѣдующихъ словъ, сказанныхъ Бенфеемъ (*Benfey*) о Грамматикѣ Панини написанной за нѣсколько вѣковъ до Р. Х.: „ни одинъ изъ языковъ всего міра не имѣетъ Грамматики, подобной санскритской. Задача, создать вполнѣ научную Грамматику и разсмотрѣть всѣ формы языка съ грамматической точки зрѣнія, если и не рѣшена во всѣхъ своихъ отдѣльныхъ частяхъ, то попытка ее рѣшить удалась въ цѣломъ".

Высоко развитой, блестящій математическій духъ древнихъ грековъ угасъ; ихъ строго-логическій, основанный на построеніи синтезъ, сдѣлалъ все возможное для изученія пространственныхъ формъ. Съ паденіемъ греческаго творчества, во главѣ математическихъ наукъ стали индусы, они сообщили имъ совершенно иное направленіе, не менѣе высокое. Направленіе это послужило къ тому, чтобы изгнать утвердившееся направленіе древнихъ

грековъ и дать первое мѣсто численнымъ отношеніямъ. Ариѳметика и Алгебра заняли первое мѣсто, Геометрія же не подвигалась впередъ; такъ продолжалось въ теченіи Среднихъ Вѣковъ, и только уже въ новѣйшее время когда стали прилагать Алгебру къ Геометріи, снова Геометрія заняла прежнее мѣсто, чему не мало способствовали новые методы, введенные въ математическія науки, какъ напр. методъ координатъ и безконечно-малыхъ. Наравнѣ съ созерцательнымъ направленіемъ въ наукахъ, мы видимъ у индусовъ необыкновенную склонность къ отвлеченнымъ—абстрактнымъ частямъ математическихъ наукъ, напримѣръ въ ихъ Ариѳметикѣ, Алгебрѣ и Анализѣ. Направленіе это у индусовъ столь же характерно, какъ направленіе пространственныхъ форменныхъ представленій грековъ, которые были также односторонни въ своихъ взглядахъ, какъ индусы въ своихъ. Новѣйшіе европейскіе математики съумѣли оба эти направленія соединить. Безспорно направленіе греческихъ геометровъ, въ дальнѣйшемъ развитіи наукъ математическихъ, было менѣе прирождено новѣйшимъ геометрамъ, чѣмъ приложеніе отвлеченныхъ алгебраическихъ законовъ, къ такимъ геометрическимъ представленіямъ, которыя недоступны непосредственному представленію. Эллиптическіе интегралы и обратныя имъ функціи различныхъ порядковъ, пространства различныхъ измѣреній—не суть-ли это различныя степени неба, въ которыхъ возсѣдаютъ индусскіе боги. У однихъ безграничная фантазія, у другихъ безграничная отвлеченность анализа,—безграничное обобщеніе символовъ. Иными словами, направленіе и методъ индусовъ ближе новѣйшимъ математикамъ, чѣмъ направленіе и методы древнихъ греческихъ геометровъ.

Другія сочиненія того же автора:

Коническія Сѣченія и новѣйшіе алгебраическіе и геометрическіе методы для изслѣдованія свойствъ кривыхъ линій. Соч. *Салмона*, переводъ съ англійскаго М. Е. Ващенко-Захарченко. С.-Петербургъ. 1860 г. ц. 2 р. 75 к.

Символическое исчисленіе и приложеніе его къ интегрированію линейныхъ дифференціальныхъ уравненій. Кіевъ. 1862 г. ц. 1 р.

Риманнова теорія функцій составнаго перемѣннаго. Кіевъ. 1866 г. ц. 2 р.

Лекціи разностнаго исчисленія, читанныя въ Университетѣ Св. Владиміра. Кіевъ. 1868 г. ц. 2 р.

Теорія Опредѣлителей и теорія формъ. Лекціи читанныя въ Университетѣ Св. Владиміра. Кіевъ. 1877 г. ц. 3 р.

Начала Евклида съ пояснительнымъ введеніемъ и толкованіями. Кіевъ. 1880 г. ц. 6 р.

Историческій очеркъ математической литературы Халдеевъ. Кіевъ. 1881 г. ц. 40 к.

Печатаются и въ непродолжительномъ времени выйдутъ:

„Краткій историческій очеркъ развитія Геометріи“

ОТЪ САМЫХЪ ДРЕВНИХЪ ВРЕМЕНЪ ДО НАСТОЯЩАГО ВРЕМЕНИ.

„Элементарная Геометрія“

въ современномъ ея состояніи.

Въ объемѣ гимназическаго курса.

Съ требованіями просятъ обращаться по слѣдующему адресу: **Кіевъ.** Бибиковскій Бульваръ, д. № 20, Профессору **Михаилу Егоровичу Ващенко-Захарченко.**

Книгопродавцамъ, взявшимъ не менѣе **10** экземпляровъ, уступка **20%**. Пересылка на счетъ покупателя.

Цѣна 1 руб.